





ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И.А. Кириллюк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ  
НА МАКРО- И МЕЗОУРОВНЕ  
(работы разных лет)

Москва  
2025

УДК 330.1+330.8  
ББК 65.012  
К 43

Рецензенты:  
д.ф.-м.н. О.В. Сенько,  
к.э.н. А.А. Рубинштейн

**К43 Кирилюк И.А. Математическое моделирование экономики на макро- и мезоуровне (работы разных лет):** Сборник научных трудов / Под ред. В.И. Маевского, С.Ю. Малкова и С.Г. Кирдиной-Чэндлер. – М.: ИЭ РАН, 2025. – 352 с.

ISBN 978-5-9940-0795-2

В сборнике представлены работы разных лет безвременно ушедшего из жизни Игоря Леонидовича Кирилюка. Они касаются различных сторон математического моделирования макро- и мезоэкономики. В разделе 1 «Методологические и методические вопросы моделирования социально-экономических систем» представлены статьи, в которых рассмотрены теоретические вопросы моделирования экономики от мезоуровня до глобальных систем. В разделе 2 «Математический инструментарий институционального анализа» представлены работы, которые дают представления об основных направлениях работы И.А. Кирилюка в институциональной экономике. Среди них исследования в области теории институциональных X-Y-матриц, институциональных изменений и институционального дизайна. Раздел 3 «Прикладные исследования в области макро- и мезоэкономического моделирования» объединяет наиболее цитируемые работы автора, посвященные использованию аппарата производственных функций для изучения региональной экономики, а также статью о дискретной форме модели переключающегося режима воспроизводства. В заключительном разделе 4 «Методы интеллектуального анализа данных в экономических исследованиях» представлены работы последних лет жизни И.А. Кирилюка, в том числе неопубликованные ранее материалы из подготовленной им диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

ББК 65.012

© Институт экономики РАН, 2025  
© Кирилюк И.А., 2022  
© В.Е. Валериус, дизайн, 2007

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие. Сохранить и приумножить .....                                                                       | 10  |
| РАЗДЕЛ 1. Методологические и методические вопросы<br>моделирования социально-экономических<br>систем.....        | 11  |
| 1.1. Экономико-математические модели для<br>исследований мезоуровня экономики.....                               | 11  |
| 1.2. Мезоуровень экономики: теоретические<br>основания и математическое моделирование<br>(на англ. языке). ....  | 37  |
| 1.3. Моделирование динамики конкурирующих<br>сообществ: варианты взаимодействия.....                             | 63  |
| 1.4. Особенности долгосрочной экономической<br>динамики мировой системы: анализ<br>статистических данных .....   | 83  |
| РАЗДЕЛ 2. Математический инструментарий<br>институционального анализа.....                                       | 103 |
| 2.1. Российская модель институциональных<br>изменений: опыт эмпирико-статистического<br>исследования.....        | 105 |
| 2.2. Эмпирическая проверка теории<br>институциональных матриц методами<br>интеллектуального анализа данных ..... | 133 |
| 2.3. Математическое моделирование в задачах<br>институционального дизайна .....                                  | 161 |
| РАЗДЕЛ 3. Прикладные исследования в области макро-<br>и мезоэкономического моделирования.....                    | 187 |
| 3.1. Модели производственных функций<br>для российской экономики.....                                            | 189 |

---

|                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2. Исследование взаимосвязи производственных функций и социально-экономических показателей российских регионов методом оптимальных разбиений..... | 223 |
| 3.3. Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков...                             | 247 |
| РАЗДЕЛ 4. Методы интеллектуального анализа данных в экономических исследованиях.....                                                                | 269 |
| 4.1. Оценка качества кластеризации панельных данных с использованием методов Монте-Карло (на примере данных российской региональной экономики)..... | 271 |
| 4.2. Методы интеллектуального анализа данных и регулирование цифровой трансформации финансового сектора в России и в мире .....                     | 295 |
| 4.3. Модельные риски в финансовой сфере в условиях использования искусственного интеллекта и машинного обучения .....                               | 314 |
| 4.4. Оценка статистической значимости эмпирических закономерностей в панельных данных методами Монте-Карло.....                                     | 337 |
| Список научных трудов И.А. Кирилюка.....                                                                                                            | 357 |

## **ПРЕДИСЛОВИЕ. СОХРАНИТЬ И ПРИУМНОЖИТЬ...**

Память о тех, кто работает в науке — это прежде всего их публикации. Счастливы те, кто успевают обобщить свои работы и достижения в сборниках или монографиях. Но порой жизнь оканчивается до обидного рано, как это случилось с нашим коллегой Игорем Леонидовичем Кирилюком — он ушел из жизни 2 сентября 2022 г. на 48-м году жизни. Его последним местом работы был наш Центр институционально-эволюционной экономики и прикладных проблем воспроизводства в Институте экономики Российской академии наук (г. Москва). Работая здесь, он написал свои основные работы по математическим исследованиям в экономике, здесь же подготовил диссертационную работу, которую не успел защитить. Из более чем 70 опубликованных им работ мы собрали его самые интересные труды под обложкой этого сборника, посвященного его памяти.

Игорь Леонидович Кирилюк пришел в экономику из точных наук. В 1996 г. он закончил Дальневосточный государственный университет в г. Владивостоке по специальности «физика». Позже он переехал в Москву, и здесь началась его активная работа в сфере применения полученных знаний в области математических методов для решения экономических задач. Физическое образование помогало

ему ухватывать суть проблем, а способность обрабатывать большие массивы научной информации и интуиция — находить подходящий математический инструментарий для их описания и решения.

За годы работы в Институте экономики РАН И.Л. Кирилюк стал известным специалистом и высококлассным экспертом в эконометрических исследованиях, методах *data mining*, включая методы нелинейной динамики и искусственного интеллекта, распознавания образов и машинного обучения. Он активно включился в развитие таких теоретических направлений, как эволюционная экономика, экономическая синергетика, мезоэкономика, эконофизика и др. Работы в этих направлениях представлены в настоящем сборнике.

Нельзя не отметить, что И.Л. Кирилюк не только работал над своими собственными исследованиями, но всегда щедро помогал коллегам, нуждавшимся в его квалифицированной математической помощи. Примером является его вклад в развитие исследований в области теории переключающегося режима воспроизводства (ПРВ) путем совершенствования разрабатываемых здесь моделей. В 2016 г. он впервые построил дискретный аналог модели ПРВ, где представил уравнения для случаев как непрерывных, так и дискретных финансовых потоков при рассмотрении трех взаимодействующих подсистем. При этом ему удалось сохранить основные допущения и механизмы «непрерывной» модели ПРВ. В этом проявился характерный для Игоря Леонидовича корректный и вдумчивый стиль работы: при решении коллективных задач он стремился досконально разобраться в проблеме, которая требовала решения, чтобы предложить максимально адекватный математический метод ее разрешения. Благодаря этому его результаты активно использовались коллегами в дальнейшей работе и помогали развивать новые направления. Так, в рассматриваемом случае И.Л. Кирилюк, используя разработанную им дискретную форму модели ПРВ, получил важный ана-



литический результат, а именно: определил начальные условия, соответствующие скоординированному, устойчивому экономическому росту без систематического отставания в производительности одних подсистем от других (Кирилук, 2016). Этот результат позволил в дальнейшем обоснованно задавать начальные условия функционирования моделей ПРВ, что отмечено в коллективной монографии его коллег (Маевский и др., 2020. С. 17).

Другим примером эффективного участия И.А. Кирилюка в коллективной работе служит выполненный им анализ математических моделей, используемых мезоэкономистами. Ему удалось выполнить, по сути, пионерное исследование и представить обзор этих моделей, который был включен в совместную с коллегами статью, опубликованную на английском языке (Kruglova, Volynskii, Kirilyuk, 2019). Симптоматично, что среди многих исследователей, процитировавших эту работу, есть и один из основоположников современной гетеродоксальной мезоэкономики Курт Допфер из Австрии.

Еще одной чертой личности Игоря Леонидовича Кирилюка, которую нельзя не отметить, было стремление к популяризации получаемых в науке результатов, заинтересованность в распространении научных знаний среди широкой общественности, и особенно молодежи. Многие годы он сотрудничал с Центральным институтом непрерывного образования Общества «Знание» и читал лекции о перспективах развития новых методов и технологий, уделяя особенное внимание их роли для будущего развития человечества. Особенно он верил в трансгуманизм, а также криотехнологии, которые помогут сохранять личность человека после смерти. Мы полагаем, что для ученого этой цели служит не в меньшей мере издание систематизированного корпуса научных работ, что мы и попытались сделать.

В данном сборнике, посвященном памяти нашего коллеги, представлены как его опубликованные работы,

уже нашедшие своих читателей, так и неопубликованные ранее тексты. Все они сгруппированы в четырех разделах. Начинается сборник с Раздела 1 «Методологические и методические вопросы моделирования социально-экономических систем». Здесь представлены статьи, в которых рассмотрены теоретические вопросы моделирования экономики от мезоуровня до глобальных систем. В разделе 2 «Математический инструментарий институционального анализа» представлены работы, которые дают представления об основных направлениях работы И.Л. Кирилюка в институциональной экономике. Среди них исследования в области теории институциональных X-Y-матриц, институциональных изменений и институционального дизайна. Раздел 3 «Прикладные исследования в области макро- и мезоэкономического моделирования» объединяет наиболее цитируемые работы автора, посвященные использованию аппарата производственных функций для изучения региональной экономики, а также упомянутую выше статью о дискретной форме модели переключающегося режима воспроизводства. В заключительном разделе 4 «Методы интеллектуального анализа данных в экономических исследованиях» представлены работы И.Л. Кирилюка последних лет его жизни, в том числе некоторые неопубликованные материалы подготовленной им диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель д.ф.-м.н., профессор О.В. Сенько).

При подготовке настоящего сборника неоценимую помощь нам оказал коллега и друг И.Л. Кирилюка, который был с ним до конца его дней — Антон Павлович Свиридов. Он взял на себя труд сведения всех материалов в один сборник и подготовку сборника памяти Игоря Леонидовича Кирилюка к печати. Вместе с А.П. Свиридовым мы обещали его маме сделать это, и мы это сделали.

Включенные в сборник статьи И.Л. Кирилюка публикуются с разрешения редакций журналов, в которых они были

опубликованы ранее. Материалы из неопубликованного автореферата диссертации И.Л. Кирилюка публикуются с разрешения наследницы его архива, матери Ирины Игоревны Кирилюк.

Мы надеемся, что оставленный И.Л. Кирилюком след в науке не пропадет, а вместе с его трудами сохранится и приумножится память о нашем товарище и коллеге.

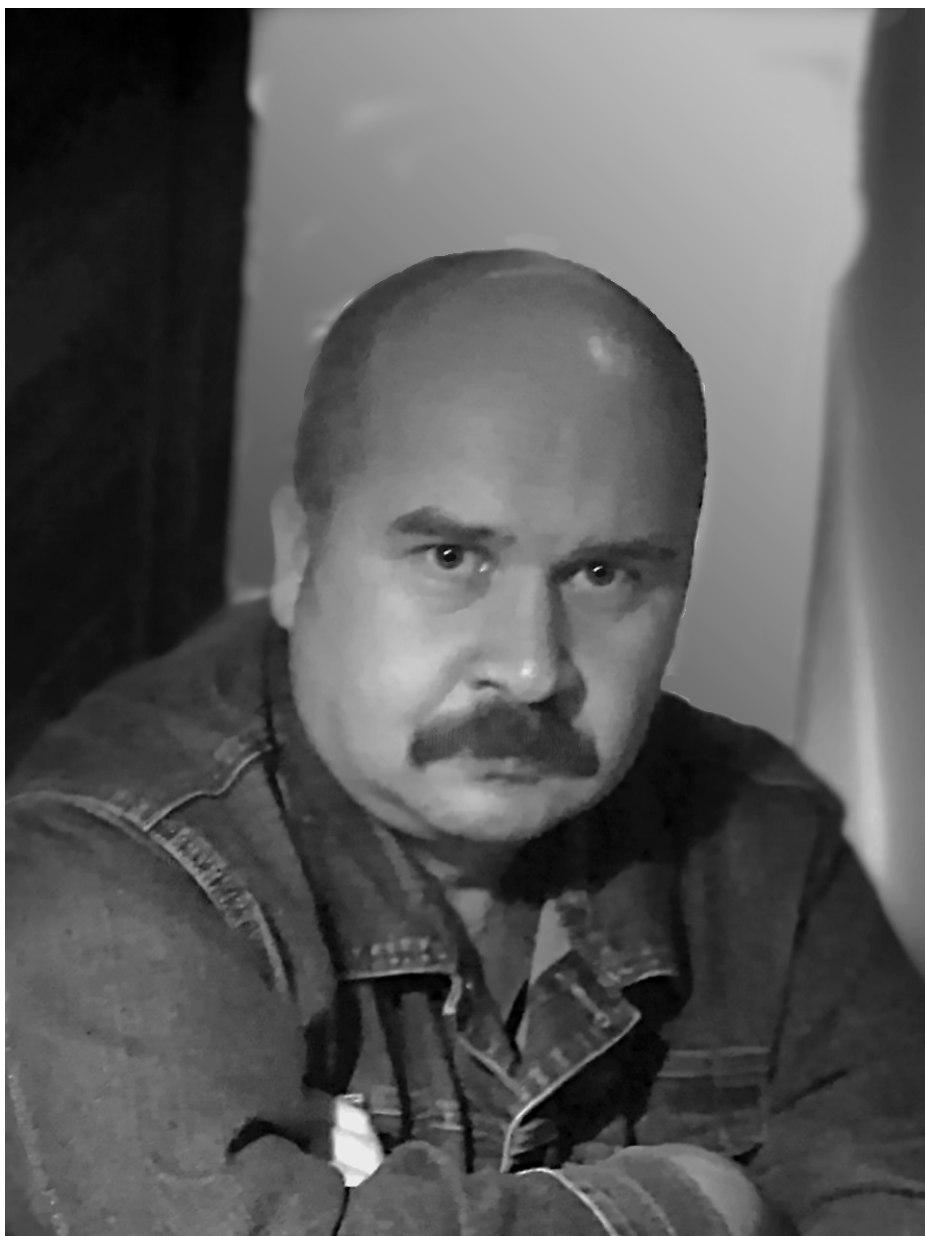
*Владимир Иванович Маевский,  
академик РАН, доктор экономических наук, профессор*

*Сергей Юрьевич Малков,  
доктор технических наук, профессор*

*Светлана Георгиевна Кирдина-Чэндлер,  
доктор социологических наук*

---





*Игорь Леонидович Кириллюк*



Раздел 1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ  
И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ

## 1.1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ МЕЗОУРОВНЯ ЭКОНОМИКИ

*Кириллюк И.А.*

Журнал институциональных исследований. 2017.

Т. 9. № 3. С. 50–63.

DOI: 10.17835/2076-6297.2017.9.3.050-063.

JEL: B15, B25, B52, C02, C7.

В статье представлен обзор ряда математических моделей, применяемых для описания и анализа мезоуровня экономики. Предложены критерии отнесения моделей к классу моделей мезоуровня, отличающие их от чисто микроэкономических, или макроэкономических моделей. Приводятся примеры использования математических моделей в литературе по мезоэкономике. Показано, что к моделям для исследования мезоуровня можно отнести как некоторые классические модели типа межотраслевого баланса Леонтьева или, например, теории игр, так и относительно новые модели, использующие математический аппарат систем нелинейных отображений или дифференциальных уравнений, а также многообразные имитационные модели. Подобно тому как развитие нелинейной физики привело к возможности описания разномасштабных самоорганизующихся структур, мезомасштабный уровень экономики, понимаемый как совокупность эволюционирующих, взаимодействующих между собой, конкурирующих и кооперирующихся подсистем, порождающих эмерджентные явления типа возрастающей отдачи, гиперболического роста или самоорганизованной критичности, может быть уместно описывать с помощью моделей эконофизики и применения принципов синергетики. Также обсуждаются перспективы развития моделей мезоуровня и проблема условности выделения уровней экономики, обусловленной, к примеру, признаками масштабной инвариантности в некоторых социально-экономических системах.

**Ключевые слова:** мезоэкономика; мезоуровень экономики; теория игр; эконофизика; имитационное моделирование; производственные функции; масштабная инвариантность.



## ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELS FOR STUDYING OF MESOLEVEL OF ECONOMY

The review of a number of the mathematical models applied to the description and analysis of mesolevel of economy is presented in article. The criteria for assigning models to a class of meso-level models that distinguish them from purely microeconomic or macroeconomic models are proposed. Examples of the use of mathematical models in the literature on mesoeconomics are given. The some classical models like input–output model of Leontief, or, for example, game theory, and rather new models using a mathematical apparatus of systems of nonlinear mappings or the differential equations, diverse simulation models, can be considered as models of mesolevel. Just as development of nonlinear physics has led to a possibility of the description of multi-scale self-organizing structures, the mesolarge-scale level of economy understood as set of the subsystems evolving, interacting among themselves, competing and cooperating generating the emergent phenomena like the increasing return, the hyperbolic growth or self-organized criticality can be appropriate to describe by means of models of econophysics and use of the principles of synergetics. Also discussed are the prospects for the development of meso-level models and the problem of the conventionality of separating the levels of the economy, due, for example, to signs of scale invariance in some socio-economic systems.

**Keywords:** mesoeconomics; mesolevel of economy; game theory; econophysics; simulation modeling; production functions; scale invariance.

### Введение

Математические модели, применяемые для описания и исследования экономических процессов, традиционно делятся на микроэкономические и макроэкономические. Однако, со второй половины прошлого века начинает распространяться точка зрения о том, что такой дихотомии недостаточно и что следует учитывать наличие промежуточного экономического уровня, который называли мезоэкономическим, иначе говоря, мезоуровнем экономики (Ng, 1986). Утверждается,

что этот уровень имеет особенности, которые не сводимы ни к микро-, ни к макроуровню. На нем происходят разнообразные формы коллективных экономических процессов. И если основным объектом микроуровня являются микроэкономические субъекты (фирмы, домохозяйства и т.п.), а на макроуровне это страны — относительно однозначно определенные объекты, то на мезоуровне можно выделять множества различных структур промежуточного масштаба, используя для этого разные способы агрегации микроэкономических единиц или дезагрегации макроэкономических объектов.

Самые очевидные способы дезагрегации макроэкономик — это деление на отрасли или регионы. Однако также могут быть выделены такие объекты исследования, как экономические кластеры, корпорации и прочие образования, которые представляют собой разного рода агрегаты субъектов микроуровня. Наконец, к промежуточному уровню относят экономические институты, т.е. правила поведения микроэкономических субъектов, определяющие возможность устойчивого развития макроэкономических систем (Кирдина, 2014). Соответственно, математические модели, применяемые для описания и изучения таких промежуточных объектов, могут считаться моделями мезоуровня экономики.

Первоначально ни классическая политэкономия, ни неоклассическая экономическая теория, которая строилась преимущественно на микроэкономических основаниях, не ставили своей целью выделение качественно различных уровней иерархии экономики. Впервые термины «микроэкономика» и «макроэкономика» употребил Рагнар Фриш в 1933 г. (Frisch, 1933). Однако считается, что макроэкономика получает свое развитие после выхода книги Дж. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег» (Keynes, 1936). Необходимость разделения уровней анализа была связана с рядом причин, важнейшей из которых было осознание того, что одни и те же экономические процессы, рассматриваемые на микро- или макроуровнях, могут приводить к качественно различным результатам. Об этом ярко свидетельствует, например, пара-

докс сбережений Кейнса (известный так же как «парадокс бережливости»).

Понятие мезоэкономики ни Фришем, ни Кейнсом не использовалось. Оно вошло в научный оборот намного позже (Ng, 1986). С тех пор количество работ, посвященных анализу мезоуровня экономики, постоянно растет (см. статьи А.И. Волинского и М.С. Кругловой в этом номере). Однако многие из них не содержат математических моделей. В то же время авторы множества статей, посвященных математическим моделям, описывающим, например, экономики отраслей и регионов, не упоминают в явной форме о мезоэкономике. Наконец, некоторые экономико-математические модели, созданные за века существования экономической мысли, могут быть интерпретированы как мезоэкономические лишь «задним числом». В следующих разделах приводятся примеры моделей, которые могут быть использованы для описания мезоэкономики.

### **Универсальный математический аппарат, применимый для описания мезоуровня: теория игр**

К моделям мезоуровня можно отнести некоторые математические модели, применяемые в институциональной экономике, поскольку институты относят к мезоэкономическому уровню (подробнее об этом см. (Клейнер, 2003; Кирдина, 2015)). В первую очередь в этой связи упоминается теория игр. Важнейший вклад в это направление внесли Дж. Нейман, Дж. Нэш (Von Neuman, Morgenstern, 1944; Nash, 1951). Также применению математики в институциональной экономике посвящены работы (Mirowski, 1981; Shubik, 2012). На русском языке по этой теме вышла статья (Петросян, 2006).

В. Элснер (2015) обращает внимание на то, что такие подходы, как системная динамика, анализ сетей, теория графов, теория игр, компьютерная имитация, используемые первоначально в экономическом мейнстриме, нашли далее активное применение в институциональной и эво-

люционной экономике. Институты рассматриваются при таком подходе как «правила игры», вырабатываемые в процессе взаимодействия экономических агентов. Институты — результат компромисса, который может ограничивать возможности каждого агента, но выгоден для системы в целом. Возможны ситуации, когда институты не оптимальны даже для системы, но их упразднение требует слишком больших усилий (это объясняет возникновение так называемых «институциональных ловушек»). Теория игр объясняет существование неоптимальных равновесий, как в «дилемме заключенного». Таким образом, свойства системы не выводятся из свойств отдельных агентов. В зависимости от того, кого подразумевать под игроками, модели теории игр могут использоваться в микроэкономическом, макроэкономическом и мезоэкономическом анализе (изначально они использовались в микроэкономике).

### **Универсальный математический аппарат, применимый для описания мезоуровня: производственные функции**

Существуют и другие математические инструменты, которые универсально применимы для исследования любых уровней экономики. Одним из таких инструментов являются производственные функции. Они используются как в простейших эконометрических расчетах, так и в качестве составляющих компонент более сложных экономических моделей. Простейшая и наиболее известная форма производственной функции — функция Кобба—Дугласа, применяется не только в микроэкономических исследованиях, но также при изучении макроэкономик (на уровне стран) и на мезоэкономическом уровне (в исследованиях отдельных отраслей и регионов). При этом, как показывают расчеты разных авторов, производственные функции, в том числе функция Кобба—Дугласа, могут давать весьма точную аппроксимацию на разных уровнях экономики.

Тем не менее, следует подчеркнуть, что проблема агрегации производственных функций является нетривиальной задачей (Гребнев, 2015), поскольку производственная функция, рассчитанная для какой-либо экономической системы, не может быть представлена в общем случае как сумма производственных функций ее подсистем. Мы не можем получить, например, производственную функцию России, просто просуммировав производственные функции всех ее краев и областей. Во-первых, это не соответствует законам математики, если коэффициенты эластичностей для разных регионов не совпадают. Во-вторых, ВВП страны сам по себе не является простой суммой ВРП образующих страну территориальных единиц (краев, областей и т.п.), а превышает ее, поскольку в итоговый ВВП вносят вклад также структуры, которые имеют общегосударственное значение, не ограничивающееся конкретным регионом. Кроме того, высказывается мнение, что агрегирование до уровня макроэкономики вообще не является корректной процедурой для производственных функций, поскольку, например, достаточно спорны методы агрегирования такого используемого в них показателя, как капитал, являющегося весьма неоднородным по своей природе (Коэн, Харкерт, 2009).

С практической точки зрения производственные функции, в том числе функция Кобба—Дугласа, интересны, например, тем, что с их помощью может быть изучено явление, называемое отдачей от масштаба производства. Для функции Кобба—Дугласа она определяется как сумма коэффициентов эластичности по труду и капиталу. Часто она предполагается равной единице (в этом случае говорят о «постоянной отдаче»). При таком предположении производственная функция совокупности одинаковых подсистем остается той же, что для каждой подсистемы. В (Кирилук, 2013) приведены примеры работ, где накладывается или не накладывается такое ограничение, а затем сравниваются оба варианта. На примере модели российской экономики показано, что предположение постоянной отдачи существенно ухудшает

результат аппроксимации реальных данных. Непостоянная отдача может быть убывающей, что свидетельствует о явлениях нехватки ресурсов, насыщения, о негативных эффектах конкуренции и т.п., или возрастающей, что может свидетельствовать о возможных эффектах взаимовыгодной кооперации между подсистемами, или взаимостимулирующих эффектах конкуренции типа «гонки вооружений» (Малков, Кирилук, 2013). В любом случае непостоянная отдача (даже в системе, состоящей из относительно однотипных подсистем, с близкими значениями коэффициентов эластичности) свидетельствует о наличии эмерджентных эффектов, которые могут являться признаками целесообразности использования понятия мезоуровня для описания подобных систем.

### **Специализированные математические модели мезоэкономики**

Можно ли говорить о том, что происходит формирование каких-то особых экономико-математических моделей мезоуровня? По нашему мнению, значительное число возникших в прошлом экономико-математических моделей являются именно мезоэкономическими.

Таковой, является, например, «Экономическая таблица» — работа 1758 г. французского экономиста Франсуа Кенэ, описывающая баланс между натуральными и денежными элементами сельскохозяйственного производства среди трех классов (работники аграрного сектора, собственники земли и так называемые «бесплодный класс» — прочие лица, не занятые в сельском хозяйстве). Аналогично, ряд числовых моделей, используемых в политической экономии К. Маркса, также могут быть интерпретированы как мезоэкономические. Это прежде всего модели воспроизводства совокупного капитала, в которых он выделяет два подразделения — производство средств производства и производство предметов потребления. Мезоэкономическими можно считать модель общего экономического равновесия Л. Вальраса

(*Walras*, 1877), поскольку она предполагает установление равновесий между спросом и предложением на рынках различных благ — эти рынки могут быть интерпретированы как мезоэкономические объекты и модель Эрроу–Дебре (*Arrow, Debreu*, 1954). Мезоэкономическая по сути модель «затраты — выпуск» разработана В.В. Леонтьевым (*Leontief*, 1936). В ней имеет место дезагрегация по отраслям производства, между которыми осуществляются межотраслевые связи. Также можно считать мезоэкономической модель Неймана (*Vonn Neumann*, 1937) расширяющейся экономики, развитую впоследствии Гейлом (*Gale*, 1956), предназначенную для описания экономики в ее развитии, поскольку в ней рассматривается множество товаров (сырье, факторы производства, продукты производства, услуги и т.п.) и производственных процессов, перерабатывающих эти товары. Таким образом, все перечисленные модели могут быть отнесены к мезоэкономическим, поскольку в них макроэкономическая система дезагрегирована на множества продуктов, отраслей, производителей, потребителей и т.п.

В последние десятилетия стали появляться публикации, в названии и содержании которых имеет место прямая отсылка к тому, что в них описываются исследования в области мезоэкономики, или мезоуровня экономики, и при этом в них рассматриваются специализированные (более или менее) математические модели.

Остановимся подробнее на мезоэкономических идеях сингапурского ученого Ю Кван Нг (*Ng*, 1986, 1992; *Ng, Wu*, 2004), поскольку он считается основоположником современной мезоэкономики. Кроме того, он один из немногих, кто активно использует оригинальный, созданный специально для мезоэкономических исследований, математический аппарат. Его подход сочетает элементы макроэкономического и микроэкономического анализа упрощенной системы общего экономического равновесия. При этом предполагается отказ от принципа совершенной конкуренции. Учитывается расчет максимизации прибыли на уровне

отдельных фирм и межфирменные взаимодействия, а также влияние агрегированных переменных, таких как совокупный спрос, совокупный выпуск, уровень цен, на состояние отдельных фирм.

Нг применил свой мезоэкономический подход для анализа экономических депрессий и возможностей их предотвращения. Модель Нг позволяет реализовать как частные случаи кейнсианский и монетаристский взгляды на то, как изменения номинального спроса влияют на уровень цен и реальный выпуск (монетаристы считают, что не влияют, а кейнсианцы утверждают о возможном воздействии). Это связано с тем, что в модели Нг возможен континуум реальных равновесий, в результате чего изменение экономических показателей может вызывать переходы от одного равновесия к другому.

В большинстве остальных публикаций по мезоэкономике, содержащих математические модели (обобщающий характер имеют, например, следующие из них: (Элснер, 2015; *Мезоэкономика развития*, 2011; Чекмарева, 2016)), упоминаются модели, уже применявшиеся ранее другими авторами, например модели теории игр; модели, описывающие рынок несовершенной конкуренции; модель последовательных олигополий Штакельберга и др.

Подытоживая, отметим, что для перечисленных в этом разделе моделей характерны особенности, отличающие их как от макроэкономических, так и от микроэкономических моделей. В макроэкономике применяются формулы, связывающие между собой общие характеристики страны (ВВП, инфляция, безработица и т.п.), без деления на подсистемы. В микроэкономике описываются репрезентативные фирмы, пассивно зависящие от макропараметров. Если же в модели представлен ряд подсистем, состоящих из неоднородных агентов, взаимодействующих между собой, образующих структуры, и даже способных определять динамику системы на макроуровне, то такую модель можно относить к мезоэкономическому уровню.



## Эконофизика и описание мезоуровня экономики

Иерархический подход к рассмотрению уровней экономики, обеспечивающих ее функционирование и сбалансированное развитие, предполагает возможность поиска аналогий в физике (в первую очередь в нелинейной физике, в синергетике), в экологии и в теории эволюции, а также заимствования из них соответствующего математического аппарата.

Одним из направлений, адекватных исследованию особенностей мезоуровня экономики, является эконофизика, или «физическая экономика» (Занг, 1999; Романовский, Романовский, 2012; Чернавский, Старков, Щербаков, 2002, Словохотов, 2010). Некоторые модели эконофизики, динамика которых определяется нелинейным взаимодействием подсистем, могут иметь применения в мезоэкономике, поскольку при таком взаимодействии благодаря нелинейности могут возникать структуры более высокого уровня с новыми свойствами (хотя и линейные модели, такие как модель «затраты — выпуск» в мезоэкономике тоже применимы).

Базовой моделью, применяемой в синергетике и в исследованиях эволюции популяций биологических объектов, является модель Лотки-Вольтерра (другое название — модель «хищник—жертва»), описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Она описывает динамику популяции двух видов, один из которых питается другим, и применима в том числе для описания сообщества первобытных людей в тот период, когда они зависели от окружающей среды в той же степени, как и другие организмы, и, с некоторыми модификациями, для более развитых экономических систем. Разработаны модели, учитывающие различные дополнительные эффекты, например возможность смены ареала некоторыми из конкурирующих популяций и т.п. (Колпак, Горыня, 2015).

Для исследования конкуренции и развития современных экономических систем также разрабатываются эконофизические модели в виде систем нелинейных обыкновен-

венных дифференциальных уравнений, в том числе сходные по свойствам с моделью «хищник–жертва». Примером могут служить модели в работах Д.С. Чернавского, связанные с его теорией условной информации (Чернавский, Старков, Щербаков, 2002). В рамках этого направления можно также привести, например, работы (Акаев, 2000; Коротаев, Малков, Халтурина, 2007; Малков, Кирилук, 2013). Важной особенностью такого типа моделей является то, что они с единых позиций позволяют моделировать такие понятия, как экономическое равновесие, экономические циклы, экономический рост, и даже нерегулярную динамику экономических показателей. Они часто более наглядны, чем эконометрические модели, и дают возможности для лучшего интуитивного понимания механизмов экономических процессов, что характеризует мезоуровень экономического анализа.

В последние десятилетия в экономике большую роль играют сетевые структуры, в том числе экономические кластеры. Под ними подразумевается совокупность географически соседствующих организаций, связанных между собой, имеющих общую деятельность и взаимодополняющих друг друга. В статье (Бронштат, Московкин, 2004) предлагается рассматривать кластеры как нелинейные социально-экономические системы и описывать их деятельность посредством систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В эконофизике также применяются системы дискретных отображений (Кирилук, 2016), уравнения в частных производных (Ерофеев, Козловская, 2011) и иной математический аппарат, который имеет большие перспективы в мезоэкономическом анализе.

Ряд моделей экономики и эконофизики описывает макроэкономические системы, разделенные на взаимодействующие подсистемы мезоуровня, различающиеся по возрастам трудовых ресурсов, или основного капитала. Известным примером моделей такого типа является модель пересекающихся поколений Самуэльсона–Даймонда (*Samuelson, 1958; Diamond, 1965*). Это модель экзогенного экономического

роста, в которой индивиды разделены на две группы: первые («молодые») работают и получают деньги за результат труда, накапливая «на старость», вторые («старые») не работают и тратят накопленные сбережения.

В моделях публикаций (*Johansen, 1959; Solow, 1960; Канторович, Жиянов, Хованский, 1978; Матвеев, 1981; Чуканов, 1984; Оленев, Поспелов, 1989; Boucek et al., 2006; Бекларян, Борисова, Хачатрян, 2012*) и ряда других авторов используется идея дифференциации производственных фондов в зависимости от времени их создания. В статье (*Кузнецов, Маркова, Мичасова, 2014*) математическая модель динамики взаимодействия двух биологических популяций Гилпина-Айала применена для описания конкурентного взаимодействия двух последовательных поколений новой технологии, приводящего к диффузии инноваций.

Аналогия в описании экономических и экологических процессов также использована в работе (*Васечкина, Ярин, 2002*). В частности, там рассматривается выдвинутая в экологии гипотеза Красной Королевы, согласно которой для того, чтобы выжить, виды должны постоянно и с достаточно быстрыми темпами эволюционировать.

Подобная гипотеза используется в ряде моделей теории переключающегося режима воспроизводства, разрабатываемых коллективом под руководством академика РАН В.И. Маевского (*Маевский, Малков, 2013*). В этой теории макроэкономические системы разбиваются на совокупность подсистем, различающихся по возрасту основного капитала. Подсистемы по очереди переключаются с режима производства товаров потребления для системы в режим самообновления собственных основных фондов и наоборот. Особенностью этого класса моделей является существование как решений, соответствующих экспоненциальному росту скоординированно развивающихся подсистем, так и решений, соответствующих нерегулярной динамике показателей. Реальные экономики стран мира также демонстрируют оба вида динамики (как экспоненциальный рост, так и нерегулярное изменение ВВП). Подобное деление

поведения во времени на два типа характерно также для мезо-экономических или микроэкономических систем (например, есть обычные фирмы, чьи реальные доходы годами колеблются вокруг какого-то равновесного состояния, а есть фирмы — «газели» (Юданов, 2007), в течение какого-то времени быстро растущие примерно по экспоненте). В этой связи интересен поиск условий, при которых происходит скоординированный экспоненциальный экономический рост. В работе (Кириллук, 2016) найдены аналитические условия скоординированного экспоненциального роста для модели переключающегося режима воспроизводства, приведенной к форме системы дискретных отображений.

Подытоживая раздел, вновь обратимся к истории. В период создания макроэкономики в 30-х годах прошлого века уже были хорошо развиты термодинамика и статистическая физика, что позволяло применять при переходе от микроуровня к макроуровню рассуждения, аналогичные тем, что использовались в подобных случаях в физике. Но развитие и осмысление проблем нелинейной физики, синергетики, теории диссипативных структур было еще впереди. Именно синергетика, развитие которой приходится на вторую половину XX в., дала возможность описания самоорганизации структур на самых разных масштабах. В этом многообразии структур уже намного сложнее выделить два уровня описания, чем в классической термодинамике. На наш взгляд, во многом это стало предпосылкой того, что с конца прошлого века стал возрастать интерес к введению понятия мезоуровня в экономике.

## Имитационное моделирование мезоуровня

Благодаря возрастанию мощности компьютерных устройств, наряду с относительно простыми базовыми моделями, позволяющими уловить лишь самые основные свойства систем, в экономике получают распространение сложные модели, предполагающие проведение детальных симуляционных расчетов (Чекмарева, 2016). Развивается имитационное моде-

лирование, позволяющее учитывать весьма индивидуальные свойства экономических агентов, их неоднородность (Дементьев, 2015). Также разные агенты могут в рамках одной имитационной модели различаться по уровню агрегированности. То есть в роли агента могут выступать индивидуум, фирма, отрасль, страна и разные другие объекты. Структуры мезоуровня и коллективные свойства в таких моделях могут задаваться разработчиками, а могут выявляться как результат расчета.

Многообразие возможностей, которые могут использоваться в имитационном моделировании, делает затруднительной классификацию таких моделей. Иногда в качестве основных подходов выделяют системную динамику, восходящую к работам Дж. Форрестера (*Forrester, 1958*), дискретно-событийное моделирование и агентное моделирование. Агентное моделирование отличается тем, что в нем правила задаются для индивидуального поведения агентов, в то время как в системной динамике могут использоваться дифференциальные уравнения, где агенты «обезличены» и описывается непосредственно динамика показателей, характеризующих их массовое поведение. Имитации агентов могут обладать довольно сложным поведением и по сути моделью интеллекта. В таких случаях говорят об агентно-ориентированном моделировании систем с распределенным интеллектом. Усложнение имитационных моделей, на наш взгляд, влечет за собой тенденцию отхода от упрощений, характерных как для микроэкономических, так и для макроэкономических моделей, и возможность все более тонко моделировать многоуровневую структуру экономики.

### **Условность выделения уровней экономики. Масштабная инвариантность**

В экономике меньше, чем в физике, разница между масштабами, на которых выделяются уровни (например, число людей на планете гораздо меньше числа Авогадро), и больше роль индивидуальных особенностей систем.

Кроме того, само понятие уровней в экономике часто неоднозначно и размыто. Влиятельность отдельных экономических агентов, будь то страны, фирмы или индивидуумы, варьирует в очень широких масштабах (Талеб, 2009). Явления положительной обратной связи, «самоорганизованной критичности» (Бак, 2013), приводят к тому, что для некоторых социально-экономических структур выявляется эффект «масштабной инвариантности». (Подлазов, 2002). Масштабная инвариантность означает, что в системе в каком-то диапазоне изменения величин вообще трудно выделить масштабы, которые имеют характерные структуры. Математически масштабная инвариантность описывается степенным распределением (распределением Парето).

В этой связи можно предположить, что дальнейшее развитие математического аппарата для мезоэкономического анализа (по аналогии с принципом соответствия в физике) будет происходить в направлении разработки универсальных подходов, применимых для описания экономики на всех масштабах.

## Заключение

Рассматривая различные экономико-математические модели, мы увидели, что возможность отнесения их к моделям мезоуровня может быть обусловлена разными их особенностями. Некоторые модели (такие как модель Леонтьева) специально создавались как дезагрегированные по отраслям или другим конкретным экономическим подсистемам и могут считаться мезоэкономическими (хотя авторы подобных моделей термин «мезоэкономика» не использовали). Другие модели, например ряд моделей теории игр, носят достаточно общий характер и могут быть с некоторыми конкретизациями применены для моделирования разных уровней экономики, в том числе мезоуровня. Есть нелинейные модели, в которых эффекты мезоуровня могут возникать как результат самоорганизации. В ряде публикаций, непосредственно посвящен-

ных мезоэкономике и употребляющих этот термин, используются те или иные конкретные математические модели. Для мезоэкономических моделей характерны неоднородность подсистем и возможность для них оказывать влияние на систему в целом. Нужно учитывать, что развитие экономико-математических методов, например, имитационного моделирования, и проявления эффектов типа масштабной инвариантности делают отнесение моделей к какому-либо уровню экономики достаточно условным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акаев А. (2000). Переходная экономика глазами физика. Бишкек: Учкун, 262 с.
2. Бак П. (2013). Как работает природа: теория самоорганизованной критичности. М.: URSS, 276 с.
3. Бекларян Л. А., Борисова С. В. и Хачатрян Н. К. (2012). Однопродуктовая динамическая модель замещения производственных фондов. Магистральные свойства // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, Т. 52, № 5, с. 801–817.
4. Броншпак Г. К. и Московкин В. М. (2004). Экономические кластеры: элементы количественной теории, сетевые структуры, типология // *Бизнес-информ*, № 11–12, с. 20–29.
5. Васечкина Е. Ф. и Ярин В. Д. (2002). Динамическое моделирование эколого-экономической системы // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*. Севастополь: «ЭКОСИ – Гидрофизика», с. 163–174.
6. Гребнев М. И. (2015). Агрегированная производственная функция с учетом научно-технического прогресса для экономики России // *Вестник ПГУ. Серия Экономика*, № 4 (27), с. 71–79.
7. Дементьев В. Е. (2015). Микро- и мезооснования макроэкономической динамики // *Вестник Университета (Государственный университет управления)*, № 8, с. 103–109.
8. Ерофеев В. Т. и Козловская И. С. (2011). Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. М.: Едиториал УРСС, 248 с.
9. Занг В.-Б. (1999). Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории. Пер. с англ. М.: Мир, 335 с., ил.
10. Канторович Л. В., Жиянов В. И., Хованский А. Г. (1978). Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // *Сб. тр. ВНИИ системных исслед.* вып. 9, с. 5–25.

11. Кирдина С. Г. (2014). Институциональные матрицы и развитие России. Введение в X-Y-теорию. Изд. 3-е, перераб., расш. и иллюстр. М.—СПб.: Нестор-История, 468 с.
12. Кирдина С. Г. (2015). Методологический институционализм и мезо-уровень социального анализа // *СОЦИС*, № 12, с. 51–59.
13. Кирилук И. А. (2013). Модели производственных функций для российской экономики // *Компьютерные исследования и моделирование*, Т. 5, № 2, с. 293–312.
14. Кирилук И. А. (2016). Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков // *Компьютерные исследования и моделирование*, Т. 8, № 5, с. 803–815.
15. Клейнер Г. Б. (2003). Мезоэкономические проблемы российской экономики // *Экономический вестник Ростовского государственного университета*, Т. 1, № 2, с. 11–18.
16. Колпак Е. П. и Горыня Е. В. (2015). Математические модели «ухода» от конкуренции // *Молодой ученый*, № 11 (91), с. 59–70.
17. Коротаев А. В., Малков А. С. и Халтурина Д. А. (2007). Компактная математическая макро модель технико-экономического и демографического развития мир-системы (1–1973 гг.). Обоснование // *История и современность*, №1, с. 19–37.
18. Козн А. и Харкерт Дж. (2009). Судьба дискуссии двух Кембриджей о теории капитала // *Вопросы экономики*, № 8, с. 4–27.
19. Кузнецов Ю. А., Маркова С. Е. и Мичасова О. В. (2014). Математическое моделирование динамики конкурентного замещения поколений инновационного товара // *Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*, № 2(1), с. 170–179.
20. Маевский В. И. и Малков С. Ю. (2013). Новый взгляд на теорию воспроизводства. Монография. М.: ИНФРА-М, 238 с.
21. Малков С. Ю. и Кирилук И. А. (2013). Моделирование динамики конкурирующих сообществ: варианты взаимодействия // *Информационные войны*, №2 (26), с. 49–56.
22. Матвеев В. Д. (1981). Дискретная модель с фондами, различающимися по срокам службы // *Оптимизация*. Выпуск 26 (43), с. 90–102.
23. *Мезоэкономика развития* (2011). / под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера; Центральный экономико-математический ин-т РАН. М.: Наука, 805 с.
24. Оленев Н. Н. и Поспелов И. Г. (1989). Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // *Матем. моделирование: Методы описания и исследования сложных систем*, ред. А. А. Самарский, Н. Н. Моисеев, А. А. Петров, М.: Наука, с. 175–200.



25. Петросян Д. С. (2006). Математические модели институциональной экономики // *Аудит и финансовый анализ*, № 4. с. 279–313.
26. Подлазов А. В. (2002). Распределение конкурентов, масштабная инвариантность состояния и модели линейного роста // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, № 1–2.
27. Романовский М. Ю. и Романовский Ю. М. (2007). Введение в экономфизику. Статистические и динамические модели. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 280 с.
28. Словохотов Ю. Л. (2010). Аналогии фазовых переходов в экономике и демографии // *Компьютерные исследования и моделирование*, Т. 2, №2, с. 209–218.
29. Талеб Н. Н. (2009). Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости / Н. Н. Талеб; пер. с англ. В. Сонькина, А. Бердичевского, М. Костионовой, О. Попова; под ред. М. Тюнькиной. М.: Изд. «Колибри», 528 с.
30. Чекмарева Е. А. (2016). Обзор российского и зарубежного опыта агент-ориентированного моделирования сложных социально-экономических систем мезоуровня // *Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз*, № 2 (44), с. 225–246.
31. Чернавский Д. С., Старков Н. И. и Щербаков А. В. (2002). О проблемах физической экономики // *Успехи физических наук*, Т. 172, № 9, с. 1045–1066.
32. Чуканов С. В. (1984). Об одной динамической модели экономики с фондами, дифференцированными по моментам создания // *Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса*, 2, ВНИИСИ, М., с. 46–61.
33. Элснер В. (2015). Снова об институционалистской теории институциональных изменений: Институциональная дихотомия в более формальном представлении // *Эволюция экономической теории: воспроизводство, технологии, институты. материалы X международного Симпозиума по эволюционной экономике и Методологического семинара по институциональной и эволюционной экономике*. СПб.: Алетейя, с. 280–292.
34. Юданов А. Ю. (2007). Гении национального бизнеса // *Эксперт*, 23 апр., №16.
35. Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy // *Econometrica*, 22 (3), pp. 265–290.
36. Boucekkine, R., de la Croix, D. and Licandro, O. (2006). Vintage Capital // *Department of Economics, European University Institute*, Econo no. 2006/08 (<http://cadmus.iue.it/dspace/bitstream/1814/4346/1/ECO2006-8.pdf> – Дата обращения 10.07.2017).
37. Diamond, P. A. (1965). National Debt in Neoclassical Growth Model // *American Economic Review*, 55 (5), 1126–1150.

38. Forrester, J. (1958). Industrial Dynamics: A Major Breakthrough for Decision Makers // *Harvard Business Review*, 36 (4), pp. 37–66.
39. Frisch, R. (1933). Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics // *Economic essays in honor of Gustav Cassel*, London: pp. 171–205
40. Gale, D. (1956). A closed linear model of production. In Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker, editors, *Linear Inequalities and Related Systems* // *Annals of Mathematics Studies*, 38 (18), 285–303.
41. Johansen, L. (1959). Substitutions versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis // *Econometrica*, 27 (2), 157–175.
42. Keynes, J. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London: Macmillan.
43. Leontief, W. (1936). Quantitative input and output relations in the economic systems of the United States // *The Review of Economic Statistics*, 18 (3), 105–125.
44. Mirowski, P. (1981). Is there a mathematical neoinstitutional economics? // *Journal of Economic Issues*, 15, 593–613.
45. Nash, J. (1951). Non-cooperative games // *Annals of Mathematics*, 54 (2), 286–295.
46. Ng, Y.-K. (1986). *Mesoeconomics: A Micro – Macro Analysis*. New York: St. Martin's Press.
47. Ng, Y.-K. (1992). Business Confidence and Depression Prevention: A Meso-economic Perspective // *American Economic Review*, 82 (2), 365–371.
48. Ng, Y.-K. and Wu, Y. (2004). Multiple Equilibria and Interfirm Macro-Externality: An Analysis of Sluggish Real Adjustment // *Annals of Economics and Finance*, 5 (1), 61–77.
49. Samuelson, P. A. (1958). An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money // *Journal of Political Economy*, 66 (6), 467–482.
50. Shubik, M. (2012). *Mathematical Institutional Economics* // *Cowles Foundation Discussion Papers 1882*, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
51. Solow, R. (1960). Investment and technical progress // Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick, *Mathematical models in the social sciences*, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV, Stanford, California: Stanford University Press, pp. 89–104.
52. Von Neumann, J. (1937). Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes // *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, no. 8, pp. 73–83, translated as, A Model of General Economic Equilibrium // *Review of Economic Studies*, 13 (33), (1945–46) 1–9.

53. Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press. America. 625 p. Русское издание: Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970, 708 с.
54. Walras, L. (1874). *Éléments d'économie politique pure*. Lausanne: Corbaz.

#### REFERENCES

1. Akaev, A. (2000). Transition economy through the eyes of physics. Bishkek. Uchkun, 262 p. (In Russian).
2. Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22 (3), 265–290.
3. Bak, P. (2013). How nature works: The science of self-organized criticality. Moscow, URSS, 276 p. (In Russian).
4. Beklaryan, L. A., Borisova, S. V. and Khachatryan N. K. (2012). A single-dynamic model of replacement assets. Main properties. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 52 (5), 801–817. (In Russian).
5. Boucekkine, R., de la Croix, D. and Licandro, O. (2006). Vintage Capital. Department of Economics, European University Institute, Econo. 2006/08 (<http://cadmus.iue.it/dspace/bitstream/1814/4346/1/ECO2006-8.pdf> – Access Date: 10.07.2017).
6. Bronshpak, G. K. and Moskovkin, V. M. (2004). Economic Clusters: Elements of a Quantitative Theory, Network Structures, Typology. *Business Inform*, 11–12, 20–29. (In Russian).
7. Chekmareva, E. A. (2016). Review of Russian and foreign experience of agent-oriented modeling of complex socio-economic mesolevel systems. *Economic and social changes: facts, trends, forecast*, 2 (44), 225–246. (In Russian).
8. Chernavsky, D. S., Starkov, N. I. and Shcherbakov, A. V. (2002). On some problems of physical economics. *Phys. Usp*, 45, 977–997. (In Russian).
9. Chukanov, S. V. (1984). On one dynamic model of the economy with funds differentiated by the moments of creation. Models and methods in forecasting scientific and technical progress, 2, VNIISI, Moscow, pp. 46–61. (In Russian).
10. Cohen, A. J. and Harcourt, G. C. (2003). Whatever Happened to the Cambridge Capital Theory Controversies? *Journal of Economic Perspectives*, 17 (1), 199–214.
11. Dementev, V. E. (2015). Micro- and meso-bases of macroeconomic dynamics. *Bulletin of the University (State University of Management)*, 8, 103–109. (In Russian).
12. Diamond, P. A. (1965). National Debt in Neoclassical Growth Model. *American Economic Review*, 55 (5), 1126–1150.

13. *Elsner, W.* (2015). The Theory of Institutional Change Revisited: The Institutional Dichotomy, Its Dynamic, and Its Policy Implications in a More Formal Analysis. Tenth International Symposium on Evolutionary Economics "The Evolution of Economic Theory: Economic Reproduction, Technologies, Institutions". SPb, Aletheia, pp. 280–292. (In Russian).
14. *Erofeenko, V. T. and Kozlovskaya, I. S.* (2011). Partial differential equations and mathematical models in economics: a course of lectures. Moscow, URSS Editorial. 248 p. (In Russian).
15. *Forrester, J.* (1958). Industrial Dynamics: A Major Breakthrough for Decision Makers. *Harvard Business Review*, 36 (4), 37–66.
16. *Frisch, R.* (1933). Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics. Economic essays in honor of Gustav Cassel, London, pp. 171–205.
17. *Gale, D.* (1956). A closed linear model of production. In Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker, editors, *Linear Inequalities and Related Systems. Annals of Mathematics Studies*, 38 (18), 285–303.
18. *Grebnev, M. I.* (2015). The aggregate production function for the Russian economy (with progress in science and technology considered). *Perm University Bulletin. Economy*, 4 (27), 71–79. (In Russian).
19. *Johansen, L.* (1959). Substitutions versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis. *Econometrica*, 27 (2), 157–175.
20. *Kantorovich, L. V., Zhiyanov, V. I. and Khovansky, A. G.* (1978). The analysis of dynamics of economic indicators on the basis of single-product dynamic models. Sb.tr. VNII sistemnyh issled., 9, 5–25. (In Russian).
21. *Keynes, J.* (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London, Macmillan.
22. *Kirdina, S. G.* (2014). *Institutional Matrices and Development in Russia. (3rd revised and supplemented edition)*. Moscow-St. Petersburg, Nestor-history, 468 p. (In Russian).
23. *Kirdina, S. G.* (2015). Methodological institutionalism and mesolevel of social analysis. *Sotsiologicheskie Issledovaniia*, 12, 51–59. (In Russian).
24. *Kirilyuk, I. L.* (2013). Models of Production Functions for the Russian Economy. *Computer Research and Modeling*, 5 (2), 293–312. (In Russian).
25. *Kirilyuk, I. L.* (2016). The discrete form of the equations in the theory of the shifting mode of reproduction with different variants of financial flows. *Computer Research and Modeling*, 8 (5), 803–815. (In Russian).
26. *Kleiner, G. B.* (2003). Meso-economic problems of the Russian economy. *Economic bulletin of Rostov State University*, 1 (2), 11–18. (In Russian).

27. Kolpak, E. P. Gorynya, E. V. (2015). Mathematical models of “care” from competition. *Young scientist*, 11 (91), 59–70. (In Russian).
28. Korotaev, A. V., Malkov, A. S. and Khalturina, D. A. (2007). Compact mathematical macromodel of technical-economic and demographic development of the world-system (1-1973). *Justification. History and modernity*, 1, 9–37. (In Russian).
29. Kuznetsov, Yu. A., Markova, S. E. and Michasova, O. V. (2014). Mathematical modeling of dynamics of competitive replacement of generations of innovative goods. *Vestnik Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo*, 2 (1), 170–179. (In Russian).
30. Leontief, W. (1936). Quantitative input and output relations in the economic systems of the United States. *The Review of Economic Statistics*, 18 (3), 105–125.
31. Maevsky, V. I. and Malkov, S. Yu. (2013). A New Approach to the Theory of Reproduction. Moscow, INFRA-M, 238 p. (In Russian).
32. Malkov, S. Yu. and Kirilyuk, I. L. (2013). Modeling the dynamics of competing communities: options for interaction. *Information wars*, 2 (26), 49–56. (In Russian).
33. Matveenko, V. D. (1981). Discrete model with the funds that differ in life cycle. *Optimizacija*, 26 (43), 90–102. (In Russian).
34. *Mesoeconomics of development* (2011) / Ed. G. B. Kleiner; Central Economic Mathematical Institute RAS. Moscow, Science, 805 p. (In Russian).
35. Mirowski, P. (1981). Is there a mathematical neoinstitutional economics? *Journal of Economic Issues*, 15, 593–613.
36. Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 (2), 286–295.
37. Ng, Y.-K. (1986). *Mesoeconomics: A Micro – Macro Analysis*. New York, St. Martin's Press.
38. Ng, Y.-K. (1992). Business Confidence and Depression Prevention: A Mesoeconomic Perspective. *American Economic Review*, 82 (2), 365–371.
39. Ng, Y.-K. and Wu, Y. (2004). Multiple Equilibria and Interfirm Macro-Externality: An Analysis of Sluggish Real Adjustment. *Annals of Economics and Finance*, 5 (1), 61–77.
40. Olenev, N. N. and Pospelov, I. G. (1989). Exploring of the Investment Policy of Firms in Market Economy. In: *Mathematical Modelling: Methods of Description and Investigation of Complex Systems* / Ed. A.A. Samarsky, N.N. Moiseev, A. A. Petrov / Moscow, Nauka, pp. 175–200. (In Russian).
41. Petrosyan, D. S. (2006). Mathematical models of institutional economics. *Audit i finansivnyj analiz*, 4, 279–313. (In Russian).

42. Podlazov, A. V. (2002). Distribution of competitors, scale invariance of the state and models of linear growth. *Izvestiya Vuzov. Applied nonlinear dynamics*, 10 (1–2), 20–43. (In Russian).
43. Romanovsky, M. Yu. and Romanovsky, Yu. M. (2012). Introduction to Econophysics: Statistical and Dynamical Models. Moscow – Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 340 p. (In Russian).
44. Samuelson, P. A. (1958). An exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy*, 66 (6), 467–482.
45. Shubik, M. (2012). Mathematical Institutional Economics. Cowles Foundation Discussion Papers 1882, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
46. Slovkhotov, Yu. L. (2010). Phase transitions associated with economy and demography. *Computer Research and Modeling*, 2 (2), 209–218. (In Russian).
47. Solow, R. (1960). Investment and technical progress. Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick, Mathematical models in the social sciences, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV, Stanford, California: Stanford University Press, pp. 89–104.
48. Taleb, N. N. (2009). The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. Moscow, Kolibri, 528 p. (In Russian).
49. Vasechkina, E. F. and Yarin, V. D. (2002). Dynamic modeling of ecological-economic system. Ecological safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources. Sevastopol', «JeKOSI – Gidrofizika», pp. 163–174. (In Russian).
50. Von Neumann, J. (1937). Über einekononomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, no. 8, pp. 73–83, translated as, A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 13 (33) (1945–46), 1–9.
51. Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press. America. 625 p.
52. Walras, L. (1874). *Éléments d'économie politique pure*. Lausanne, Corbaz.
53. Yudanov, A. Yu. (2007). The geniuses of national business. *The expert*, 23 apr, no. 16. (In Russian).
54. Zhang, W.-B. (1999). Synergetic Economics. Time and Change in Nonlinear Economics. Moscow, Mir, 335 p. (In Russian).

## 1.2. МЕЗОУРОВЕНЬ ЭКОНОМИКИ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (на англ. языке)

*Kruglova M.S., Volynskii A.I., Kirilyuk I.L.*

Journal of Institutional Studies. 2019.

Vol. 11. № 1. P. 41–54.

DOI: 10.17835/2076-6297.2019.11.1.041-054.

JEL: B15, B25, P16, P51.

В статье представлен ретроспективный анализ развития мезо-экономической идеи от первого упоминания этого термина в научной литературе (Wittfogel, 1962) до опубликованных в настоящее время исследовательских работ. Выделено три основных направления понимания мезоуровня в современной англоязычной неортодоксальной экономической литературе: неошумпетерианская интерпретация, эволюционный подход и неоинституциональная трактовка. Нами рассмотрены все три направления, показаны взаимосвязи, сходства и различия между ними. Выявлено основное различие между англоязычными и русскоязычными традициями мезоэкономических исследований. Для англоязычных авторов характерной особенностью является внимание к задаче преодоления принципов методологического индивидуализма в экономических исследованиях, что необходимо для понимания процессов институционализации правил взаимодействия между экономическими индивидами. Напротив, рассмотрение российскими или, точнее, постсоветскими экономистами мезоэкономических тем было обусловлено историческими реалиями перехода от советской плановой экономики к рыночной экономике постсоветской России, характеризовавшимися эффектом распада связей между экономическими субъектами. Также рассмотрены математические модели, разработанные российскими учеными и применимые в мезоэкономических исследованиях. Выделено четыре основные группы таких моделей. Первая группа — модели, основанные на идеях экономофизики. Вторая группа разрабатывает модели агентного

моделирования. Третья группа основана на оптимальных многоотраслевых межрегиональных моделях. Четвертая рассматривает экономические системы, дифференцированные по возрасту основного капитала. В эту группу входят математические модели, основанные на теории переключающегося режима экономического воспроизводства.

**Ключевые слова:** мезоуровень экономического анализа; гетеродоксальная экономика; экономический мейнстрим; институциональная мезоэкономика.

**Благодарности:** исследование выполнено в рамках государственного задания для ФБГУН Института экономики РАН по теме «Феномен мезоуровня в экономическом анализе: новые теории и их практическое применение». Доклад был представлен на 30-й конференции Европейской ассоциации эволюционной политической экономии (ЕАЕРЕ) в рамках совместной сессии «Экономика и мезоэкономика сложности: решение проблем и противоречий современного сложного мира (Special JAES и RA Q)», Ницца, 6–8 сентября 2018 года; и на XII Международном Пушкинском симпозиуме на сессии «Актуальные проблемы мезоуровня экономики», Пушкино, 21–23 сентября 2017 года. Авторы благодарны доктору В. Эльснеру и доктору Т. Хейнриху за критику и ценные комментарии.

## MESO-LEVEL OF ECONOMY: THEORETICAL APPROACHES AND MATH MODELING

In the paper we will present a retrospective analysis of the development of the mesoeconomic idea from the first mention of the term in research literature (Wittfogel, 1962) to research papers now being published. Three main trends of meso level understanding in modern English language heterodox economic literature can be identified: the Neo-Schumpeterian Interpretation, the Evolutionary Approach and Neo-Institutionalism. The paper will consider all three trends with a consistent approach, showing the interrelations, similarities, and differences between them. The analysis shows the main difference between the English-speaking and Russian-speaking traditions of mesoeconomic research. For the



English-language work a typical feature is reflection on the need to overcome methodological individualism in economic research, to better understand the emerging processes and the institutionalization of the rules of interaction between economic individuals. The consideration by Russian or, more precisely, post-Soviet economists of mesoeconomic topics has been conditioned by the historical realities of transition from the Soviet planned economy to the market economy of post-Soviet Russia. We will also consider the mathematical models developed by Russian scientists as applied to mesoeconomic research. There are four main groups. The first group of models is based on Econophysics ideas. The second group develops agent-based models. The third group is based on the Optimal Multisectoral Interregional Models. The fourth group considers economic systems differentiated by the age of fixed capital. This fourth group includes math models based on the theory of the shifting mode of economic reproduction.

**Keywords:** mesolevel of economic analysis; heterodox economics; economic orthodoxy; institutional mesoeconomics.

**Acknowledgments:** This paper was presented at the 30th Conference of the European Association for Evolutionary Political Economy (EAEPE), in the Joint Session ‘Complexity Economics and Mesoeconomics: Addressing the Exigencies and Contradictions of Today’s Complex World (Special JAES and RA Q)’, Nice, 6–8 September 2018; and at the XII International Pushchino Symposium in the Session “Actual problems of the meso-level of economy”. Pushchino, 21–23 September 2017. The authors are very grateful to Dr. W. Elsner and Dr. T. Heinrich for their critiques and valuable comments.

## **Introduction: mesoeconomics in the world and in Russia**

The beginning of the formation of the binary model of the structure of the economy, with the micro and macro levels, was laid by J.M. Keynes in his classic work «The General Theory of Employment, Interest and Money» (Keynes, 2007). It is a key concept for modern mainstream economic theory. However, one

can often find statements about the need to recognize a third, intermediate level between the micro- and macro-levels, the meso level. The idea of a transition from a binary to a trinary model of the economic hierarchy, where the meso level should be located between the micro and macro levels, periodically becomes an object of discussion. Its supporters often face “neoclassical” criticism. At the same time, it can be stated that “the present stage is characterized by a greater willingness of heterodox directions to focus on the meso levels of analysis” (*Dopfer, 2012, p. 142*). The increasing complexity of scientific knowledge about the socio-economic processes taking place in society and the parallel transformation of the structure of society induce us to talk about the need to recognize the meso level as an independent object of economic research. The development of formal and informal supra-individual institutions, not normally observed within the framework of the “micro-macro” paradigm, prompts the conceptualization of the meso level as a separate social and economic hierarchy level (*Hodgson, 2000; Ayres, Martinas, 2005*). “In general, evolutionary and institutional theories, modeling, clusters, network structures and all sorts of group associations may require their own theoretical space – meso” (*Chen, 2008, p. 121*).

The first meso level reference found by us is dated in 1962: Karl A. Wittfogel used the term “mesoeconomic” to describe the regional level of governance (*Wittfogel, 1962*). Arthur Cole gave a different understanding in his monograph “Meso-Economics: A Contribution from Entrepreneurial History”, published in 1968. He defined the meso level as a space between micro- and macro-economics, manufacturing companies and economic aggregates, such as the industrial sectors, in which the phenomenon of the “business system” is formed (*Cole, 1968, p. 11–16*).

In the 1980s Yew-Kwang Ng, a Singaporean researcher, attempted to carry out a neoclassical synthesis of micro- and macro-level research, proposing to approve the concept of mesoeconomics (*Ng, 1982; 1986*). He understood mesoeconomics

as a synthesis of macro-and micro-analysis. In parallel with Ng, the English economist and politician Stuart Holland also turned to mesoeconomic research. In the monograph «The Market Economy. From micro-to meso-economics» (Holland, 1987), he outlined the trend of a modern market economy, in which oligopolistic competition and network forms of industrial coordination play an increasingly important role, which interpretation requires a transition from a micro- to a meso- paradigm in economic research (Ozawa, 1999). In our opinion both works represent mesoeconomics in mainstream concepts: these studies consider the meso level in isolation from evolutionary theory, which will be emphasized in our analysis.

In 1992 Francis Stewart defined the level of analysis between a country's overall economy and the level of individuals, companies and households with the notion of "meso". According to the concept, the meso-level characterizes the depth of the impact of the macro-level structures, determining, for example, which property, gender groups and industries bear the brunt of macro-level reforms (Stewart, 1992, p. 37; Rodgers, Cooley, 1999, p. 1401).

The Russian-speaking meso-level study tradition is younger than the European: according to RSCI<sup>1</sup>, the first publication in Russian devoted to mesoeconomics was the article "Competitiveness in Micro, Meso- and Macro-Level Measurements", published in 1998 (Gelvanovsky, Zhukovskaya, Trofimova, 1998). Classical works in this area are the two monographs: «Mesoeconomics of the transition period ...» (*Mesoeconomics of the transition period*, 2001) and «Mesoeconomics of development» (*Mesoeconomics of development*, 2011), edited by G. Kleiner.

The purpose of this paper is to show the main threads of mesoeconomic theory, and to make a comparative analysis of how mesoeconomics is considered by Russian authors against the backdrop of other worldwide mesolevel descriptions. The

---

1. Russian science citation index.

first part of the paper is devoted to the study of «English-speaking» mesoeconomic works. In the second part, we describe the main directions of mesoeconomic research in Russia. In conclusion, we compare the English-language and Russian works on mesoeconomics, pointing out their similarities and differences.

## 1. Mesoeconomics and meso level: English-language studies

Modern European meso-level studies can be divided into three main directions: neo-Schumpeterian, neoinstitutionalist and evolutionary but which, however, do not exist separately from each other.

The neo-Schumpeterian understanding of the meso level uses Schumpeter's idea of the entrepreneur as the starting point of the theory and as the main source and engine of innovation processes. The meso level in this concept is understood as a definite ontological category, the space for the formation, adoption and dissemination of social norms and institutions, of which the latter are regarded as a meso-level phenomenon (*Dopfer, 2004*). Within the mesospace, one idea (general rule, or generic rule) is accepted and implemented by many agents (the population). A rule turns into a qualitatively different state of the general rule that transforms the customary interactions order of both micro-level agents and interactions between macro and microlevels (*Elsner, Heinrich, 2009*). In the trinary “micro-meso-macro” concept, the macrosystem is the aggregate of mesoobjects, and it reflects changes in the mesostructure. Microeconomic analysis involves considering the behavior of individual rule carriers and their local operations. It is assumed that economic development is the result of the emergence, adaptation, dissemination and institutionalization of meso-rules at micro and macro levels (*Dopfer, 2004*).

The Neo-Schumpeterian interpretation to define the meso-level as a space of institutionalization of rules is close to the

theories of proponents of evolutionary institutional economic theory. For example, Wolfram Elsner refers to the meso level, understanding it as the level of the economic hierarchy in which the observed processes of social and economic evolution occur, resulting in the emergence of new institutions (*Elsner, 2007*). The endogenous process of rule formation at the meso level is the result of an attempt to collectively overcome the uncertain economic conditions of economic agents with the aim of economic coordination and minimizing losses. The groups of emerging rules carriers in the process of co-evolution of complex systems raise them to a new institutional quality, transferring the rules from the level of micro- and meso interactions to the level of the macroeconomic space (*Elsner, 2007*).

Supporters of this trend (*Elsner, Heinrich, 2009; Elsner, 2010*) refer to the game theory about the well-known dilemma of the prisoner, for describing endogenous processes modeling the emergence and institutionalization of rules. The prisoner's dilemma illustrates processes about how the mesolevel agents, through the desire to minimize costs and to overcome collectively the conditions of uncertainty, establish the rules of interactions, institutionalized as a result of their repeated actions.

In addition to game theory, mesoeconomics in the works of English-speaking researchers uses such mathematical and methodological approaches as system dynamics, network analysis, graph theory, computer simulation, models describing the market of imperfect competition and models of successive oligopolies of Stackelberg and others, as originally used in the mainstream.

## **2. Mesoeconomics in Russia**

The range of Russian-language studies of meso-level problems can be conditionally divided into three main trends: the system approach, in which the meso level is understood as the process of intra-industry interactions between economic agents with the goal of harmonizing the economic system; a regional-spatial

approach that considers regional economic structures as part of the meso-level, and a theoretical approach to methodological institutionalism that addresses interdisciplinary intersections of economics and sociology.

1. Two collective monographs prepared and published, with an interval of 10 years between them, under the leadership and with the participation of the Corresponding Member of the RAS, G. B. Kleiner, are classics for the system approach: «Mesoeconomics of the Transition Period ...» 2001 and «Mesoeconomics of Development» 2011. (*Mesoeconomics ...*, 2001; 2011), as well as several articles written by co-authors of the monographs (*Braginskii*, 2012; *Dementiev*, 2002; *Kleiner*, 2003). The objects of study in these works are called network structures or just networks, defined as “flows of goods and money, information transfer channels, established relationships, etc., that is, a set of economic objects (not necessarily precisely defined), viewed from the point of view of paired and group interrelations” (*Mesoeconomics ...*, 2001, p. 7). It is emphasized that “Under the mesoeconomic level or mesoeconomics, we mean not only the aggregate socio-economic subsystems of the middle level of the economic hierarchy, but also the aggregate subsystems that lie at lower levels, in particular, the enterprises and their groups.” (*Mesoeconomics ...*, 2001, p. 10). Four components of the meso-level are distinguished: sectoral mesoeconomics; interindustry mesoeconomics (interindustry vertical complexes and sub-sectoral complexes of the type of agroindustrial complexes and military industrial complexes); regional mesoeconomics (regions, territorial groups of enterprises); interregional (territorial socio-economic entities) (*Mesoeconomics ...*, 2011, p. 9). Reflecting on the methodology of mesoeconomic research, the authors emphasize the need to consider the “generic” features of the domestic economy” (*Mesoeconomics ...*, 2011, p. 10) and the inability to adapt directly the macro- and microeconomic research methods based on perceptions of a perfect market and rational behavior of the subject in making economic solutions.

2. The idea of mesoeconomics as a phenomenon that includes the regional economy, we can see in the works of E. V. Popov (Popov, 2007, p. 70) and T. R. Gareev (Gareev, 2010 (a); 2010 (b)). The authors suppose that the problems of the regional economy are often on the periphery of the mainstream economic discourse because the object of the study of the regional economy is at an intermediate level between macro- and microeconomic levels (Gareev, 2010 (b), p. 28). It is natural that regionalists appeal to the meso-level theory. For example, T.R. Gareev emphasizes the nonidentification of the concepts of the region, meso level and institutions, but reveals a fuzzy although traceable connection between mesoeconomic systems, institutions and the boundaries of the local distribution of both institutions and mesoeconomic systems (Gareev, 2010 (b), p. 30). Based on this, he proposes the theory of regional institutionalism, with the study object being the mesoeconomic systems that have economic, social, cultural and spatial dimensions (Gareev, 2010 (b), p. 36), whose consideration is possible through the study of their institutional changes (Gareev, 2010 (a), p. 57).

According to G. Kleiner, the main reason for the unsuccessful experience of market reforms in post-Soviet Russia was the failure of economic regulation at the meso level: regional and sectoral aspects. The Soviet institutions of economic planning ceased to function. At the same time, market coordination institutions were not yet available. This “led to a weakening of horizontal links, both between business entities and territorial entities” (*Mesoeconomics ...*, 2011, p. 10). Institutional failure, according to G. Kleiner, provoked a crisis of the era of transition from post-Soviet Russia to market institutions. The described historical context pushed Russian researchers to study mesoeconomics. In mesoeconomics they saw a way to develop an adequate institutional environment for meso-economic strategies for institutional reforms.

3. The main methodological framework and the subject field of Russian-language studies on mesoeconomics can be outlined in the so-called “Kleiner’s formula”: “In fact, the study of mesoeconomic structures is equivalent to the study of

institutions ... Meseconomics is a natural field of formation and action of economic institutions” (*Kleiner, 2003, p. 16*). Such an understanding is like the world tradition of meso-level studies, but the historical realities of post-Soviet Russia have identified a somewhat different, more practical direction of development.

In the context of methodological institutionalism meso level is considered in the works of S.G. Kirdina (*Kirdina, 2013; Kirdina, 2015; Kirdina, 2016*), where it is described as an opportunity to pass between the Scylla and Charybdis of two methodological extremes, characteristic of both economics and sociology: methodological individualism and methodological holism. In a similar vein, the above-mentioned T.R. Gareev reflects, the goal of meso-level research is formulated as “identification of the area in which ascending processes of new rules formation and downward processes of stabilizing constitutive rules collide” (*Gareev, 2010 (a), p. 45*), which is impossible with the use of classical micro-macroeconomic study methods.

### 3. Meseconomic models

According to different versions of the theoretical understanding of the meso-level of the economy, various classes of mathematical models can be distinguished, which can in some aspects be considered as meso-economic (*Kirilyuk, 2017; 2016*).

If we consider both mesoeconomic models describing the economy with detailed levels of industries and regions, then these mesoeconomic models include the intersectoral balance developed by the Nobel laureate V. V. Leontiev (popular in the Soviet planned economy) and economic geography models. Both directions are taken into account in the optimized interregional interindustry models (OIIM) proposed by Academician A.G. Granberg, currently used and improved in Novosibirsk at the Institute of Economics and Industrial Engineering of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. These models are sometimes referred to as the Russian equivalent of



the direction in the west called New Economic Geography, which development brought to P. Krugman a Nobel Prize. Calculations for these models are used in forecasting by the Ministry of Economic Development of the Russian Federation. The OIIM consider both the balance between the branches of each region, the interests of the regions, and the balance of interests between the regions. It also takes into account the interests of the country as a whole, including the interest of the country to equalize living standards in the regions. In simple cases, these models are linear, but there are nonlinear generalizations in some cases (*Suslov, 2011*).

Mathematical modeling of strategies to achieve personal and group subjects interests, including economic ones, is the subject for the study of mathematical game theory, which is considered as a mathematical tool suitable for describing the problems of institutional economics (a direction close to mesoeconomics, sometimes even identified with it). It is important to study the possibility of establishing such “game rules” that are optimal from the point of view of the functioning of the system as a whole. Developments in this field, called the theory of mechanisms, were recognized by the award of a Nobel Prize (*Izmailkov, Sonin, Yudkevich, 2008*). In the USSR similar studies were carried out in parallel within the framework of the “theory of active systems”, which continues to evolve, for example, at the Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences (*Burkov, Novikov, 2009*).

In addition to disaggregating the economy by industry and region, other forms of its disaggregation are possible in the models. For example, with the participation of the Nobel laureate L.V. Kantorovich, models were developed that were disaggregated by the age of the fixed capital (*Kantorovich, Zhiyanov, Khovansky, 1978*). This method of disaggregation was also used in the works of I.G. Pospelov, N.N. Olenov from the Computing Center of the Russian Academy of Sciences (*Olenov, Pospelov, 1989*) and in a number of studies by other authors. It also underlies the models of the shifting mode of reproduction (SMR) theory proposed by

Academician of the Russian Academy of Sciences V. I. Mayevsky. Mathematical models of this theory are developed at the Center for Evolutionary Economics of the Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences with the participation of S.Yu. Malkov, A. A. Rubinshtein and others. The theory describes the development of a population of competing enterprises that differ in the age of fixed capital used. They work alternately in two different modes – in the mode of releasing a product for consumption in the system and in the mode of updating equity capital (*Mayevsky, Malkov, 2013*). The mathematical basis of the theory is a system of ordinary differential equations with discrete time-varying coefficients. It is shown (*Kirilyuk, 2016*) that in the simplest cases the model can be represented as a system of non-linear discrete mappings. Depending on the values of the parameters and initial conditions, this model class can generate both random and regular dynamics (even though exogenous random influences are not used in modeling). The basic version describes the competition between enterprises, which also corresponds to a group of households, the influence of the financial sector and other clarifications which have been added to more advanced versions. From the models of the economic mainstream, the SMR model differs in the fundamentally non-equilibrium dynamics of indicators, which allows us to consider in detail the cash flow dynamics over time, as well as taking into account the heterogeneity in the characteristics of enterprises. The ability to interpret the dynamics of a population of enterprises, as an effect known in evolutionary theory as the “run of the black queen” when it is necessary to make efforts for development just in order not to drop out of the system, is one of the arguments to consider models as referring to the direction of evolutionary economics.

A mathematical adequate for describing collective processes of self-organization at the mesoeconomic level, which are the object of researchers interest in the field of institutional and evolutionary economics, is proposed in the framework of the direction called econophysics (which also includes the SMR model). The expediency of considering the meso-level of

economics with the concepts of econophysics (or in other words, synergistic economics) can be characterized using the concepts of nonequilibrium and non-linearity. For a two-tier mainstream economy, it is typical to postulate an economic equilibrium, and the only one is the application of linearization procedures in the equilibrium neighborhood. In nonlinear ordinary differential equations systems the equilibrium conditions are determined by the properties of the system, along with nonequilibrium dynamics. Nonlinear systems are characterized by a violation of the property of superposition, which researchers associate with the concepts of methodological individualism and reductionism. The concept of dynamic chaos, implying the sensitivity of the system to small impacts, also changed the scientific community's view of the relationship between the micro level and the macro level, showing in mathematical language the mechanisms of how small effects due to instability in the system can lead to significant changes at the macro level (just as in studies by J. Schumpeter and his followers of economic processes, ideas spread from one innovator to the whole society).

Econophysics originated in the west but found its followers in Russia. D. S. Chernavsky, a Russian scientist, proposed a dynamic theory of information and developed a mathematical model for the struggle between conditional information. This is a universal approach, used, for example, in studies of the interaction of languages, currencies, ideologies, etc., which are interpreted as conditional information – a set of implemented and reproducible ways of comparing certain conditional phenomena when they are in competition with alternative ways. He also developed a block-hierarchical approach in the economy, which implies considering detailing, for example, consumer goods (when describing it, the author directly mentions his attitude to the mesoeconomic level (*Chernavsky, Starkov, Shcherbakov, 2016, p. 29*)). The basis for D. S. Chernavsky's diverse topics of work are the concepts of synergetics. An important role in his economic work used the application of nonlinear ordinary differ-

ential equations which, in contrast to the well-known modern models of general equilibrium, can lead to the presence in the models of many alternative equilibrium states of economic systems. Thanks to his works, as well as to other scientists involved in this field, synergetics and the use of nonlinear dynamics methods have become popular in the scientific community. It led to the formation of the Russian school in the field of econophysics. In the works of S.Yu. Malkov, A.A. Akayev, A.V. Korotaev, and other researchers, there is a variety of dynamic systems that describe the interaction between countries, considering the possibility of increasing returns to production factors in production functions. Econophysics works are also the works of G.G. Malinetsky, A.V. Podlazova about the phenomenon of self-organized criticality, leading to changes of different scales in the systems (*Malinetsky, Podlazov, 1997*), including in social systems, etc. The importance of these approaches in econophysics allows them to describe the processes of self-organization at the meso-level of the economy and are more adequate than, for example, simple econometric models for describing the crisis phenomena in the economy, which unfortunately so far are characteristic of Russia. More information about econophysics can be found, for example, in (*Romanovsky, Romanovsky, 2012*).

If in synergetics research it is enough to have simple nonlinear systems of small dimension to identify and study unusual phenomena, then the simulation modeling of economic agents often aims to consider as much real data as possible while modeling the system. Agent-based modeling is a modern approach that actively uses computing power and allows flexibility to consider the individual characteristics of economic objects, their heterogeneity, the interaction between themselves and the influence of each on the aggregate properties of macroeconomic systems. In Russia, this area is actively developed, for example, at the Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences under the guidance of Academician of the Russian Academy of Sciences V. L. Makarov and corresponding member of the Russian Academy of Sciences A. R. Bakhtizin

(Makarov, Bakhtizin et al., 2016). They are also developing hybrid models where agent-based models are combined with a general equilibrium modeling approach or use neural networks. Agents are a rather abstract concept, and they can represent different levels of economics. Of course, when modeling their behavior, previous achievements of economic theory are considered. However, this approach does not imply a rigid link to the division of the economy into the macro and micro levels. An overview of agent-based modeling of the meso-level economic systems is presented, for example, in the article (Chekmareva, 2016). In Russia, agent-oriented models exist and are used both for Russia as a whole and for individual municipalities.

While identifying types of mesoeconomics mathematical models, it is necessary to consider that the models listed above are developing interrelatedly, the various mentioned groups of authors influence each other, borrow successful findings and resulting in a joint improvement of modeling methods. Experience shows that not all promising areas are universally recognized and promulgated immediately.

### **The conclusion: the comparative analysis of Russian-speaking and English-speaking researches of the meso level and prospects of development**

As can be seen from the analysis, there are many similarities between English-speaking and Russian-speaking researchers of mesoeconomics. Many of the authors who write about mesoeconomics consider the problem from the point of view of the evolutionary-institutional approach. From an evolutionary-institutional point of view, the meso level is the space in which the processes of the rules and institutions emerge. It is assumed that the meso level in this case will help to describe these processes, since the available micro-macro models, from the point of view of the task of describing the processes of the formation of institutions are not applicable. Similar theoretical constructions can be found in the works of Russian-

speaking and English-speaking authors. Moreover, we believe that the scientific community in Russia is ready to accept the evolutionary-institutional interpretation of the meso level.

In many studies of the meso-level as a space for the formation and functioning of institutions, the synergetic theoretical paradigm treats it as the level of the system in which the mechanisms of its self-organization are formed. The meso-level is methodologically described as a development “from the microscopic level to the macroscopic level” (*Haken, 2014*). The reason for the identification of a separate meso level is that the structures of the main characteristics of the complete system are formed at this level.

However, a comparative analysis of publications shows that there is a difference between English-speaking and Russian-speaking meso-level studies, the origin of which is determined by historical circumstances. If the meso-level for evolutionary and institutional researchers of mesoeconomics in the West is a means of overcoming the limitations of the mainstream micro-macro model, the initial interest of Russian-speaking authors was determined by the crisis in the Russian economy, a failure in the functioning of the entire economic system. Initially, G. Kleiner and his co-authors turned to mesoeconomics, understanding the level of regions and industries in the meso level. For them, mesoeconomics seemed to be a way to study the problems of the transition of the Russian economy from the planned system to the market. In those conditions, descending regulatory processes disappeared, while the downward processes of economic coordination have not shown themselves yet (*Volynskii, 2017; Kruglova, 2017; Kirdina-Chandler, Maevsky, 2017*).

We highlight four main groups of Russian models. The first group of models is based on Econophysics ideas (D.S. Chernavskii's Scientific School with A. A. Akayev, S. Yu. Malkov, and others (*Chernavsky, Starkov, Shcherbakov, 2002; Korotaev, Malkov, Khalturina, 2007; Akaev, 2000; Malkov, Kirilyuk, 2013*)). The second group develops agent-based models (V. L. Makarov, A. R. Bakhtizin at the Central Economics and Mathematics

Institute of the Russian Academy of Sciences (RAS), etc.). The third group is based on the Optimal Multisectoral *Interregional Models* developed at the Institute of Economics and Organization of Industrial Engineering of the Siberian Branch of the RAS within the framework of A. G. Granberg's scientific school of Economic Geography. The fourth group considers economic systems differentiated by the age of fixed capital by developing the approach of the Soviet Nobel laureate L.V. Kantorovich (and a team at the Computing Center of the RAS) (*Kantorovich, Zhiyanov, Khovansky, 1978*). This last group comprises the math models based on the theory of the shifting mode of economic reproduction, developed under the leadership of V. I. Maevsky in the Institute of Economics of the RAS (*Maevsky, Malkov, 2013*).

However, there is still the problem in mesoeconomic analysis, being the problem of linking mathematical modeling with ongoing theoretical developments and the development of terminology.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский О. Б. (2012). Методология и практика разработки программы развития многоотраслевого комплекса (на примере нефтехимического комплекса) // *Журнал Новой экономической ассоциации*, № 4, с. 127–147.
2. Бурков В. Н., Новиков Д. А. (2009). Теория активных систем – 40 лет // *Теория активных систем* / Труды международной научно-практической конференции (17–19 ноября 2009 г., Москва, Россия). Том I. Под ред. В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. М.: ИПУ РАН, 314 с.
3. Вольнский А. И. (2017). Мезоуровень как объект исследования в экономической литературе современной России // *Journal of Institutional Studies* (*Журнал институциональных исследований*), Т. 9, № 3, с. 36–49.
4. Гареев Т. Р. (2010а). Институты и экономическое развитие на субрегиональном (мезо-) уровне // *Общественные науки и современность*, № 5, с. 45–58.
5. Гареев Т. Р. (2010б). Региональный институционализм: terra incognita или terra ficta? // *Journal of Institutional Studies* (*Журнал институциональных исследований*), № 2, с. 27–37.

6. Гельвановский М., Жуковская В. и Трофимова И. (1998). Конкурентоспособность в микро-, мезо- и макроуровневом измерении // *Российский экономический журнал*, № 3, с. 67–78.
7. Дементьев В. В. (2002). Теория национальной экономики и мезоэкономическая теория // *Российский экономический журнал*, № 4, с. 71–82. (URL: <http://www.cemi.rssi.ru/publication/e-publishing/dementiev/old/REJ4-2002.pdf> – дата обращения: 28.12.2018)).
8. Измалков С., Сонин К. и Юдкевич М. (2008) Теория экономических механизмов (Нобелевская премия по экономике 2007 г.) // *Вопросы экономики*, № 1, с. 4–26.
9. Канторович Л. В., Жиянов В. И. и Хованский А. Г. (1978). Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // Сб. тр. ВНИИ системных исслед. вып. 9, с. 5–25.
10. Кирдина С. Г. (2015). Методологический институционализм и мезоуровень социального анализа // *СОЦИС*, № 12, с. 51–59.
11. Кирдина С. Г. (2013). Методологический индивидуализм и методологический институционализм // *Вопросы экономики*, № 10, с. 66–89.
12. Кирдина С. Г. (2016). Между макро и микро: методологические проблемы анализа мезоуровня в экономике. Новые исследования в гетеродоксальной экономике: российский вклад: Монография / Отв. ред. В. И. Маевский, С. Г. Кирдина. М.: ИЭ РАН.
13. Кирдина-Чэндлер С. Г. и Маевский В. И. (2017). Методологические вопросы анализа мезоуровня в экономике // *Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований)*, Т. 9, № 3, с. 7–23.
14. Кирилюк И. Л. (2016). Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков // *Компьютерные исследования и моделирование*, Т. 8, № 5, с. 803–815.
15. Кирилюк И. Л. (2017). Экономико-математические модели для исследования мезоуровня экономики // *Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований)*, Т. 9, № 3, с. 50–63.
16. Клейнер Г. Б. (2003). Мезоэкономические проблемы российской экономики // *Экономический вестник Ростовского государственного университета*, Т. 1, № 2, с. 11–18.
17. Кортаев А. В., Малков А. С. и Халтурина Д. А. (2007). Компактная математическая макро модель технико-экономического и демографического развития мир-системы (1 – 1973 гг.). Обоснование // *История и современность*, №1, с. 19–37.



18. Круглова М. С. (2017). Мезоэкономическая теория в англоязычной научной литературе // *Journal of Institutional Studies* (Журнал институциональных исследований), Т. 9, № 3, с. 24–35.
19. Маевский В. И. и Малков С. Ю. (2013). Новый взгляд на теорию воспроизводства. Монография. М.: ИНФРА-М, 238 с.
20. Макаров В. А., Бахтизин А. Р., Сушко Е. Д., Васенин В. А., Борисов В. А. и Роганов В. А. (2016) Агент-ориентированные модели: мировой опыт и технические возможности реализации на суперкомпьютерах // Вестник Российской академии наук, Т. 86, № 3, с. 252–262.
21. Малинецкий Г. Г. и Подлазов А. В. (1997). Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, Т. 5, № 5, с. 89–106.
22. Малков С. Ю. и Кириллук И. Л. (2013). Моделирование динамики конкурирующих сообществ: варианты взаимодействия // Информационные войны, № 2(26), с. 49–56.
23. Мезоэкономика переходного периода: рынки, отрасли, предприятия. (2001). М.: Наука, 516 с. (URL: [http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/10/mezo\\_kleiner\\_pr1.pdf](http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/10/mezo_kleiner_pr1.pdf) — дата обращения: 28.12.2018).
24. Мезоэкономика развития / под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера (2011). Центральный экономико-математический ин-т РАН. М.: Наука, 805 с. (URL: <http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/09/Mezo-razv1.pdf> — дата обращения: 28.12.2018).
25. Оленев Н. Н. и Поспелов И. Г. (1989). Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Матем. моделирование: Методы описания и исследования сложных систем, ред. А. А. Самарский, Н. Н. Моисеев, А. А. Петров. М.: Наука, с. 175–200.
26. Попов Е. В. (2007). Эволюция институтов миниекономики. М.: Наука.
27. Романовский М. Ю. и Романовский Ю.М. (2012) Введение в экономфизику: статистические и динамические модели. 2-е изд., испр. и доп. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 338 с.
28. Суслов В. И. (2011) Анализ и прогнозирование пространственного экономического развития России с использованием межотраслевых моделей // Управленческое консультирование, № 3, с. 93–105
29. Хакен Г. (2014). Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам. М.: УРСС: ЛЕНАНД.
30. Чекмарева Е. А. (2016). Обзор российского и зарубежного опыта агенториентированного моделирования сложных социально-эко-

- номических систем мезоуровня // *Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз*, № 2 (44), с. 225–246.
31. Чернавский Д. С., Старков Н. И. и Щербаков А. В. (2002). О проблемах физической экономики // *Успехи физических наук*, Т. 172, № 9, с. 1045–1066.
32. Чернавский Д.С., Старков Н.И. и Щербаков А.В. (2016) Естественная концепция в теоретической экономике. Центр социально-экономического прогнозирования им. Д.И. Менделеева. М.: Грифон, 2016.
33. Ayres, R. U. and Martinas, K. (2005). In: *Elgar, E. (Ed.) On the Reappraisal of Microeconomics*. Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA.
34. Chen, P. (2008). Equilibrium illusion economic complexity and evolutionary foundation in economic analysis. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 5(1), 81–127.
35. Cole, A. H. (1968). Meso-economics: a contribution from entrepreneurial history. *Explorations in Entrepreneurial History*, New York, 6.1 (Fall 1968), 3–33.
36. Dopfer, K., Foster, J. and Potts, J. (2004). Micro–meso–macro. *Journal of Evolutionary Economics*, 14(3), 263–279.
37. Dopfer, K. (2012). The origins of meso economics. Schumpeter’s legacy and beyond. *Journal of Evolutionary Economics*, January 2012, 22(1), 133–160.
38. Elsner, W. (2007). Why Meso? On „Aggregation“ and „Emergence“, and Why and How the Meso Level is Essential in Social Economics. *Forum for Social Economics*. April 2007, 36(1), 1–16.
39. Elsner, W. and Heinrich, T. (2009). A simple theory of ‘meso’. On the co-evolution of institutions and platform size – With an application to varieties of capitalism and ‘medium-sized’ countries. *The Journal of Socio-Economics*, 38, 843–858.
40. Elsner, W. and Heinrich, T. (2010). Towards ‘Meso’-Economics. On the Co-Evolution of Institutionalized Coordination, ‘Platform’ Size, and Performance.
41. Hodgson, G. M. (2000). From micro to macro: the concept of emergence and the role of institutions. In: *Burlamaqui, L., et al. (Eds.), Institutions and the Role of the State*. Edward Elgar, Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA, 103–126.
42. Holland, S. (1987). *The Market Economy: From Micro to Mesoeconomics*. St. Martin’s Press, Weidenfeld and Nicholson, London.
43. Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London: Macmillan (reprinted 2007).
44. Ng, Y.-K. (1986). *Mesoeconomics: A Micro – Macro Analysis*. New York, St. Martin’s Press.

45. Ng, Yew-Kwang (1982). A Micro-Macroeconomic Analysis Based on a Representative Firm. *Economica*, N.S., 49(194), 121–139.
46. Ozawa, T. (1999). Organizational efficiency and structural change: a meso-level analysis. In: Boyd G, Dunning HJ (eds) *Structural change and cooperation in the global economy*. Elgar, Cheltenham, 160–190.
47. Rodgers, Y. and Cooley, J. (1999). Outstanding Female Economists in the Analysis and Practice of Development Economics. *World Development*, 27:8, 1397–1411.
48. Stewart, F. (1992). Can Adjustment Programmes Incorporate the Interests of Women? *Afsbar and Dennis*, 13–45.
49. Wittfogel, K. A. (1962). Agrarian Problems and the Moscow-Peking Axis. *Association for Slavic, East European, and Eurasian Studies. Get access*, 21(4) December, 678–698.

## REFERENCES

1. Akaev, A. (2000). Transition economy through the eyes of physics. Bishkek. Uchkun, 262 p. (In Russian).
2. Ayres, R. U. and Martinas, K. (2005). In: Elgar, E. (Ed.) *On the Reappraisal of Microeconomics*. Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA.
3. Braginskiy, O. B. (2012). Methodology and Practice of Working out Multyindustry Complex Program (an Example of Petrochemical Complex). *Journal of New Economic Association*, 4, 127–147. (In Russian).
4. Burkov V. N. and Novikov D. A. (2009). The Theory of Active Systems – 40 years // *The Theory of Active Systems* / Proceedings of the international scientific-practical conference (November 17–19, 2009, Moscow, Russia). Vol. I. General edition – V.N. Burkov, D.A. Novikov. M.: IPU RAS. 314 p. (In Russian)
5. Chekmareva, E. A. (2016). Review of Russian and foreign experience of agent-oriented modeling of complex socio-economic mesolevel systems. *Economic and social changes: facts, trends, forecast*, 2 (44), 225–246. (In Russian).
6. Chen, P. (2008). Equilibrium illusion economic complexity and evolutionary foundation in economic analysis. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 5(1), 81–127.
7. Chernavsky, D. S., Starkov, N. I. and Shcherbakov, A. V. (2002). On some problems of physical economics. *Phys. Usp*, 45, 977–997. (In Russian).
8. Cole, A. H. (1968). Meso-economics: a contribution from entrepreneurial history. *Explorations in Entrepreneurial History*, New York, 6.1 (Fall 1968), 3–33.

9. Dementiev, V. V. (2002). Theory of the national economy and the mesoeconomic theory. *Russian Economic Journal*, 4, 71–82. (URL: <http://www.cemi.rssi.ru/publication/e-publishing/dementiev/old/REJ4-2002.pdf> –Access Date: 28.12.2018). (In Russian).
10. Dopfer, K., Foster, J. and Potts, J. (2004). Micro–meso–macro. *Journal of Evolutionary Economics*, 14(3), 263–279.
11. Dopfer, K. (2012). The origins of meso economics. Schumpeter's legacy and beyond. *Journal of Evolutionary Economics*, January 2012, 22(1), 133–160.
12. Elsner, W. (2007). Why Meso? On „Aggregation“ and „Emergence“, and Why and How the Meso Level is Essential in Social Economics. *Forum for Social Economics*. April 2007, 36(1), 1–16.
13. Elsner, W. and Heinrich, T. (2009). A simple theory of ‘meso’. On the co-evolution of institutions and platform size – With an application to varieties of capitalism and ‘medium-sized’ countries. *The Journal of Socio-Economics*, 38, 843–858.
14. Elsner, W. and Heinrich, T. (2010). Towards ‘Meso’-Economics. On the Co-Evolution of Institutionalized Coordination, ‘Platform’ Size, and Performance.
15. Gareev, T. R. (2010a). Institutes and economic development at the sub-regional (meso-) level. *Social sciences and modernity*, 5, 45–58. (In Russian).
16. Gareev, T. R. (2010b). Regional institutionalism: terra incognita or terra ficta? *Journal of Institutional Studies*, 2, 7–37. (In Russian).
17. Gelvanovsky, M., Zhukovskaya, V. and Trofimova, I. (1998). Competitiveness in micro, meso- and macrolevel measurements. *Russian Economic Journal*, 3, 67–78. (In Russian).
18. Haken H. (2014). Information and Self-Organization. Moscow: URSS: LENAND. (In Russian).
19. Hodgson, G. M. (2000). From micro to macro: the concept of emergence and the role of institutions. In: Burlamaqui, L., et al. (Eds.), *Institutions and the Role of the State*. Edward Elgar, Cheltenham, UK, Northampton, MA, USA, 103–126.
20. Holland, S. (1987). The Market Economy: From Micro to Mesoeconomics. St. Martin's Press, Weidenfeld and Nicholson, London.
21. Izmalkov, S., Sonin, K. and Yudkevich, M. (2008). Theory of Mechanism Design (2007 Nobel Prize in Economics). *Voprosy Ekonomiki*, 1, 4–26. (In Russian)
22. Kantorovich, L. V., Zhiyanov, V. I. and Khovansky, A. G. (1978). The analysis of dynamics of economic indicators on the basis of single-product dynamic models. Sb.tr. VNII sistemnyh issled., 9, 5–25. (In Russian).

23. Keynes, J. M. (1936). The General Theory of Employment, Interest and Money. London: Macmillan (reprinted 2007).
24. Kirdina, S. G. (2015). Methodological institutionalism and mesolevel of social analysis. *Sotsiologicheskie Issledovaniia*, 12, 51–59. (In Russian).
25. Kirdina, S. G. (2013). Methodological Individualism and Methodological Institutionalism. *Issues of Economics*, 10, 66–89. (In Russian).
26. Kirdina, S. G. (2016). Between macro and micro: methodological problems of meso-level analysis of the economy. *New Research in Heterodox Economics: Russian Contribution. Monograph*. Moscow, IE RAS. (In Russian).
27. Kirdina-Chandler S. G. and Maevsky V. I. (2017). Methodological Issues of the Meso-level Analysis in Economics. *Journal of Institutional Studies*, 9(3), 7–23. (In Russian).
28. Kirilyuk, I. L. (2016). The discrete form of the equations in the theory of the shifting mode of reproduction with different variants of financial flows. *Computer Research and Modeling*, 8(5), 803–815. (In Russian).
29. Kirilyuk, I. L. (2017). Economic-Mathematical Models for Studying of Mesolevel of Economy. *Journal of Institutional Studies*, 9(3), 50–63. (In Russian).
30. Kleiner, G. B. (2003). Meso-economic problems of the Russian economy. *Economic bulletin of Rostov State University*, 1(2), 11–18. (In Russian).
31. Korotaev, A. V., Malkov, A. S. and Khalturina, D. A. (2007). Compact mathematical macromodel of technical-economic and demographic development of the world-system (1- 1973). *Justification. History and modernity*, 1, 9–37. (In Russian).
32. Kruglova, M. S. (2017). Meso-economic theory in english-scientific literature. *Journal of Institutional Studies*, 9(3), 24–35. (In Russian).
33. Makarov, V. L., Bakhtizin, A. R., Sushko, E. D., Vasenin, V. A., Borisov, V. A. and Roganov, V. A. (2016). Agent-Based Models: Worldwide Experience and Technical Implementation Capabilities on Supercomputers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, 86(3), 252– 262. (In Russian).
34. Malinetsky, G. G. and Podlazov, A. V. (1997). The paradigm of self-organized criticality. The hierarchy of models and the limits of predictability. *News of universities. Applied nonlinear dynamics*, 5(5), 89–106. (In Russian).
35. Malkov, S. Yu. and Kirilyuk, I. L. (2013). Modeling the dynamics of competing communities: options for interaction. *Information wars*, 2 (26), 49–56. (In Russian).
36. Maevsky, V. I. and Malkov, S. Yu. (2013). A New Approach to the Theory of Reproduction. Moscow, INFRA-M, 238 p. (In Russian).

37. *Mesoeconomics of the transition period: markets, industries, enterprises.* (2001). Moscow: Nauka, 516 p. (URL: [http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/10/mezo\\_kleiner\\_pr1.pdf](http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/10/mezo_kleiner_pr1.pdf) – Access Date: 28.12.2018). (In Russian).
38. *Mesoeconomics of development* / ed. Member of corr. RAS G.B. Kleiner (2011). Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences. Moscow, Nauka, 805 p. (URL: <http://kleiner.ru/wp-content/uploads/2014/09/Mezo-razv1.pdf> – Access Date: 28.12.2018). (In Russian).
39. Ng, Y.-K. (1986). *Mesoeconomics: A Micro – Macro Analysis*. New York, St. Martin's Press.
40. Ng, Yew-Kwang (1982). A Micro-Macroeconomic Analysis Based on a Representative Firm. *Economica*, N.S., 49(194), 121–139.
41. Olenov, N. N. and Pospelov, I. G. (1989). Exploring of the Investment Policy of Firms in Market Economy. In: *Mathematical Modelling: Methods of Description and Investigation of Complex Systems* / Ed. A. A. Samarsky, N. N. Moiseev, A. A. Petrov / Moscow, Nauka, 175–200. (In Russian).
42. Ozawa, T. (1999). Organizational efficiency and structural change: a meso-level analysis. In: *Boyd G, Dunning HJ (eds) Structural change and cooperation in the global economy*. Elgar, Cheltenham, 160–190.
43. Popov, E. V. (2007). Evolution of Minieconomical Institutions. Moscow, «Nauka Publishers». (In Russian).
44. Rodgers, Y. and Cooley, J. (1999). Outstanding Female Economists in the Analysis and Practice of Development Economics. *World Development*, 27:8, 1397–1411.
45. Romanovsky, M. Yu. and Romanovsky, Yu. M. (2012). Introduction to Econophysics: Statistical and Dynamical Models. Moscow – Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 340 p. (In Russian).
46. Stewart, F. (1992). Can Adjustment Programmes Incorporate the Interests of Women? *Afshar and Dennis*, 13–45.
47. Suslov V. I. (2011). Analysis and Forecasting of Spatial Economic Development of Russia Using Inter-Industry Models. *Management Consulting*, 3, 93–105. (In Russian).
48. Volynskii, A. I. (2017). Mesolevel as object of research in the scientific economic literature of contemporary Russia. *Journal of Institutional Studies*, 9(3), 36–49. (In Russian).
49. Wittfogel, K. A. (1962). Agrarian Problems and the Moscow-Peking Axis. *Association for Slavic, East European, and Eurasian Studies. Get access*, 21(4) December, 678–698.

### 1.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНКУРИРУЮЩИХ СООБЩЕСТВ: ВАРИАНТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*Малков С.Ю., Кириллюк И.А.*

Информационные войны. 2013. № 2 (26). С. 49–56.

В статье рассмотрена базовая математическая модель, описывающая взаимодействие конкурирующих систем. Проведен анализ различных вариантов развития конкуренции. Показано, что конкурентные взаимодействия могут приводить в одних случаях к гибели систем, в других — к их устойчивому сосуществованию, в третьих — к ускоряющемуся развитию. Исследованы условия, при которых происходит переход от одного режима взаимодействия к другому.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, конкуренция, устойчивость.

#### SIMULATION OF THE DYNAMICS OF THE COMPETING COMMUNITIES: INTERACTION TYPES

In the article the base mathematical model, which describes interaction of competitive systems, is examined. The analysis of the different variants of the development of competition is carried out. It is shown that competitory interactions can lead in some cases to the loss of systems, in others — to their steady co-existence, in the third — to the accelerating development. The conditions of the passage from one regime of interaction to another are investigated.

**Keywords:** Mathematical modeling, competition, stability.

#### Введение

Роль конкуренции в природе и обществе чрезвычайно велика. В одних случаях конкуренция может способствовать прогрессивному развитию природных и социальных процессов; в других случаях она может оказывать деструктивное дей-

ствие, приводить к гибели биологических видов, к экономическим кризисам и разрушительным войнам<sup>1</sup>. Возникает вопрос, можно ли математически описать столь разные проявления конкуренции в рамках одной модели.

Описанию и моделированию конкурирующих сообществ посвящено большое количество работ (см., например, (Балацкий, 2008; Чернавский, 2006; Портер, 2005; Рубин, 2004)), однако они, как правило, посвящены конкретным видам конкуренции. В настоящей работе мы на основе базовой математической модели конкуренции рассмотрим различные ситуации и результаты ее проявления, а также установим формализованные критерии перехода от одной ситуации к другой. В следующих статьях мы рассмотрим и проанализируем модели конкретных социальных процессов, в которых реализуются указанные базовые ситуации.

## 1. Описание базовой модели

Опишем базовую модель конкуренции. Пусть имеется  $N$  взаимодействующих сообществ (биологических или социальных), причем каждое сообщество описывается вектором характеристик  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Тогда взаимодействие этих сообществ в обобщенном виде может быть описано системой уравнений:

$$\frac{dX_i}{dt} + A_i(X_i) = \sum_{j=1}^N B_{ij}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где функционал  $A_i(X_i)$  описывает автономное развитие сообществ (без учета их взаимодействия), а функционалы  $B_{ij}(X_i, X_j)$  учитывают взаимодействие сообществ друг с другом (для упрощения изложения будем рассматривать только парное взаимодействие). Будем для упрощения считать, что каждое

- 
1. Яркие примеры дуалистичного проявления конкуренции дает экономика: с одной стороны, конкуренция считается двигателем экономического развития, с другой стороны, конкуренция приводит к разорению фирм, безработице, имущественному расслоению и социальным взрывам.



$i$ -е сообщество описывается только одной характеристикой  $x_i$ , тогда уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{dx_i}{dt} + A_i(x_i) = \sum_{j=1}^N B_{ij}(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

Разлагая в ряд и ограничиваясь линейными и квадратичными членами, из (2) получаем:

$$\frac{dx_i}{dt} + a_i(x_i) = \sum_{j=1}^N b_{ij}(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $a_i$  и  $b_{ij}$  — параметры модели.

Учтем специфику конкурентных взаимоотношений и рассмотрим простейший случай  $N = 2$ , тогда из (3) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - b_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - b_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры  $a_1, a_2$  характеризуют собственные механизмы роста переменных  $x_1$  и  $x_2$  рассматриваемых сообществ (например, размножение организмов в биологических популяциях). Параметры  $b_1, b_2$  характеризуют ограничения, накладываемые на рост переменных  $x_1$  и  $x_2$  (например, ограниченность имеющихся ресурсов). Параметры  $c_1, c_2$  характеризуют конкурентное взаимодействие между рассматриваемыми акторами, поэтому перед соответствующими членами в (4) стоит знак «минус»: конкурирующие акторы хотят подавить своего соперника и наносят ущерб друг другу, поэтому их взаимодействие приводит к уменьшению значений переменных как  $x_1$ , так и  $x_2$ .

Наложим ограничения на знаки параметров и переменных в модели (4). Примем условия для параметров:  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ , а также будем интересоваться решениями в области  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ .

В случае конкуренции должно выполняться условие  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ . Это в соответствии с (4) означает следующее: в результате конкурентного взаимодействия происходит осла-

бление каждого актора (значения  $x_1$  и  $x_2$  уменьшаются), что играет негативную роль. Это свойство конкурентной системы можно наглядно проиллюстрировать с помощью ее фазового портрета (Богданов, 2008). Для этого требуется построение изоклин — линий, на которых производная по времени одной из переменных равна нулю.

Приравнивая нулю правые части (4), получаем следующий набор изоклин в виде четырех прямых:

$$a_1 - b_1x_1 - c_1x_2 = 0, a_2 - b_2x_2 - c_2x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0. \quad (5)$$

Первую и вторую изоклины удобно записать в преобразованной форме:

$$x_2 = a_1 / c_1 - x_1 b_1 / c_1, x_2 = a_2 / b_2 - x_1 c_2 / b_2. \quad (6)$$

Точки пересечения любой изоклины, полученной из первого уравнения (4), с любой изоклиной, полученной из второго уравнения (4), являются положениями равновесия. Таким образом, имеем следующие формулы для равновесных точек в системе:

$$1) \text{ начало координат } (x_1 = 0, x_2 = 0) \quad (7)$$

$$2) (x_1 = a_1 / b_1, x_2 = 0); \quad (8)$$

$$3) (x_1 = 0, x_2 = a_2 / b_2); \quad (9)$$

$$4) \left( \frac{a_1 b_2 - a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2}, \frac{a_2 b_1 - a_1 c_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2} \right) \quad (10)$$

Если одна из переменных равна нулю в начальный момент времени, то она и остается равной нулю. А это значит, что никакие траектории не могут пересекать оси координат. Динамика системы вдоль осей в общем случае описывается уравнениями первого порядка  $\dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_1^2$ ,  $\dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_2 x_2^2$  имеющими точки бифуркации при  $b_1 = 0$  и  $b_2 = 0$  соответственно.

Рассмотрим типовые ситуации для случая, близкого к симметричному (когда  $a_1 \approx a_2$ ,  $b_1 \approx b_2$ ,  $c_1 \approx c_2$ ).

Пусть конкурентное взаимодействие отсутствует ( $c_1 = c_2 = 0$ ), т. е. развитие сообществ является автономным, не зависящим друг от друга. Тогда изоклины и фазовый портрет будут иметь вид, изображенный на рис. 1 (где  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $b_1 = b_2 = 1$ ). Стрелочки на фазовом портрете показывают, в каком направлении будет происходить изменение характеристик системы (значений  $x_1$  и  $x_2$ ) с течением времени в процессе ее эволюции.

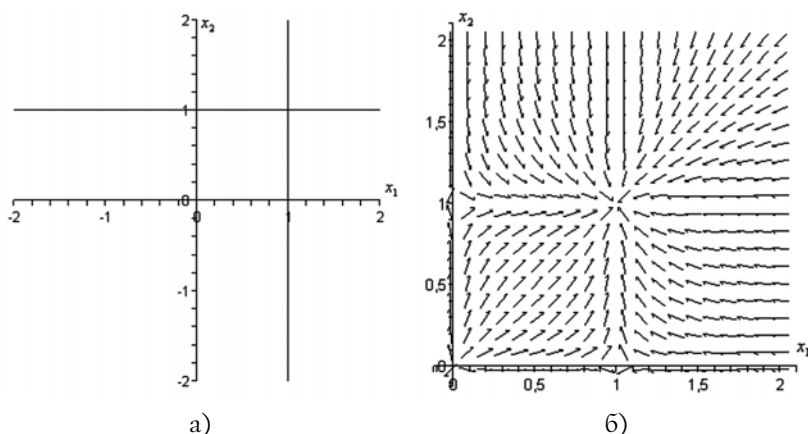


Рис. 1. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) в случае автономного развития (взаимодействие сообществ отсутствует:  $c_1 = c_2 = 0$ )

Из рис. 1 видно, что в системе (4) существует одно устойчивое состояние равновесия с характеристиками  $(x_1 = a_1 / b_1, x_2 = a_2 / b_2)$ , к которому с течением времени эволюционирует система.

Если между сообществами возникает конкурентное взаимодействие ( $c_1 > 0, c_2 > 0$ ), то ситуация изменяется. В случае если конкурентное взаимодействие не слишком сильное и удовлетворяет условию  $c_1 c_2 < b_1 b_2$ , то просто происходит смещение устойчивого положения равновесия в область меньших значений  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2), т. е. состояние обеих сообществ ухудшается.

Если интенсивность конкурентного взаимодействия усиливается и в какой-то момент превысит порог  $c_1 c_2 = b_1 b_2$ ,

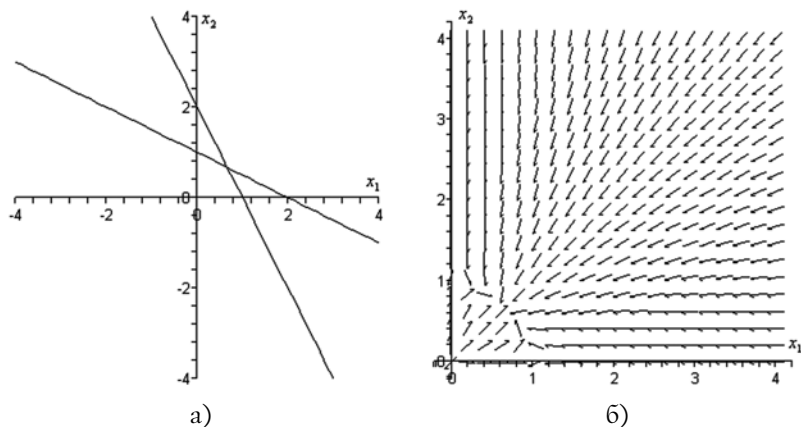


Рис. 2. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае относительно слабого конкурентного взаимодействия ( $c_1c_2 < b_1b_2$ )

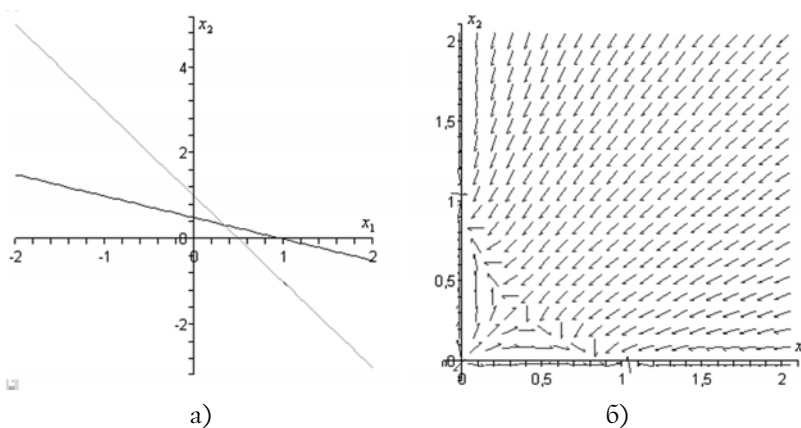


Рис. 3. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ( $c_1c_2 > b_1b_2$ )

то происходит бифуркация, фазовый портрет кардинально изменяется (рис. 3).

Видно, что вместо одного устойчивого состояния равновесия возникает два, но в каждом из них существует только одно сообщество, а второе погибает, не выдержав конкурентной борьбы (такая ситуация соответствует, например,

разорению фирм или поражению государства в войне). То, какое из сообществ окажется победителем, а какому суждено погибнуть, зависит от начальных условий.

Таким образом, сравнение автономного развития с развитием при наличии конкуренции формально свидетельствует в пользу первого. Возникает вопрос, чем же тогда обосновано расхожее мнение о том, что конкуренция полезна для биологических и социальных сообществ. Ответ заключается в следующем: результат конкурентных отношений зависит от реакции на них взаимодействующих акторов и от особенностей рассматриваемой ситуации. Поясним это, используя модель (4), и выведем математические критерии смены отрицательного эффекта от конкуренции на положительный, и наоборот.

Итак, формально из (4) следует, что конкуренция приводит к ухудшению характеристик взаимодействующих сообществ и угнетает их развитие (поскольку перед членами, учитывающими конкурентное взаимодействие в (4), стоит знак «минус»). Это соответствует случаю пассивного поведения акторов. Но возможен вариант, когда конкурирующие сообщества начинают мобилизовывать свои собственные ресурсы в стремлении выйти победителем в конкурентной борьбе. И это может приводить к тому, что оба конкурирующих сообщества начинают развиваться интенсивнее.

Математически это можно выразить следующим образом: у рассматриваемых сообществ параметры  $a_1$ ,  $a_2$  перестают быть постоянными и начинают зависеть от переменных, характеризующих сообщество-конкурента, например, приобретая следующий вид:

$$a_1 \rightarrow a_1 + h_1 x_2, a_2 \rightarrow a_2 + h_2 x_1. \quad (11)$$

Такая запись означает следующее: чувствуя угрозу своему существованию от деятельности конкурента,  $i$ -е сообщество мобилизует внутренние ресурсы и интенсифицирует механизмы собственного роста. Это сказывается на увеличении

параметра  $a_i$  пропорционально существующей угрозе (т. е. пропорционально «силе»  $x_j$  конкурента). Коэффициенты  $h_i$  отражают возможности для наращивания собственного роста (к которым относятся ресурсные, технические, организационные, интеллектуальные и др. возможности).

В итоге, с учетом реакции рассматриваемых сообществ на конкуренцию со стороны соперника, система уравнений (4) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (a_1 + h_1 x_2) x_1 - b_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2 = a_1 x_1 - b_1 x_1^2 + g_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= (a_2 + h_2 x_1) x_2 - b_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2 = a_2 x_2 - b_2 x_2^2 + g_2 x_1 x_2,\end{aligned}\quad (12)$$

где параметры  $g_1$  и  $g_2$  равны:

$$g_1 = h_1 - c_1, g_2 = h_2 - c_2, \quad (13)$$

и могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Это основное отличие системы уравнений (12) от (4), в которой члены, описывающие взаимодействие, всегда имели отрицательное значение.

Рассмотрим, к чему приводит такое преобразование базовой математической модели, описывающей конкурентное взаимодействие. Для этого снова обратимся к анализу фазовых портретов.

Приравнивая нулю правые части (12), получаем следующий набор изоклин в виде четырех прямых:

$$a_1 - b_1 x_1 + g_1 x_2 = 0, a_2 - b_2 x_2 + g_2 x_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0. \quad (14)$$

Первую и вторую изоклины удобно записать в преобразованной форме:

$$x_2 = -a_1 / g_1 + x_1 b_1 / g_1, x_2 = a_2 / b_2 + x_1 g_2 / b_2. \quad (15)$$

Соответственно, имеем следующие формулы для равновесных точек в системе:

$$1) \text{ начало координат } (x_1 = 0, x_2 = 0); \quad (16)$$

$$2) (x_1 = a_1 / b_1, x_2 = 0); \quad (17)$$

$$3) (x_1 = 0, x_2 = a_2 / b_2); \quad (18)$$

$$4) \left( \frac{a_2 g_1 + a_1 b_2}{b_1 b_2 - g_2 g_1}, \frac{a_2 b_1 + a_1 g_2}{b_1 b_2 - g_1 g_2} \right) \quad (19)$$

Сравнение с (7)–(10) показывает, что первые три точки равновесия остаются прежними, а четвертая изменяется.

Рассмотрим для более наглядного понимания динамики некоторые частные случаи системы (12). Допустим, что равны между собой начальные значения обеих переменных и попарно равны коэффициенты при соответствующих слагаемых в первом и во втором уравнениях (12) (т. е.  $a_1 = a_2 = a$ ,  $b_1 = b_2 = b$ ,  $g_1 = g_2 = g$ ).

Тогда оба сообщества развиваются в соответствии с уравнением Бернулли:

$$\dot{x}_i = ax_i + (-b + g)x_i^2 \quad (20)$$

Это уравнение имеет бифуркацию при  $g = b$ . В точке бифуркации ( $g = b$ ) имеет место *экспоненциальное* решение, описывающее непрерывный рост обоих сообществ. Сдвиг значений какого-либо из двух параметров в сторону  $g < b$  приводит к *логистическому* уравнению с насыщением: рост переменных  $x_1$  и  $x_2$  ограничен значением  $a / (b - g)$ . Сдвиг значений какого-либо из двух параметров в сторону  $g_i > b_i$  приводит к уравнению неограниченного роста с обострением. Четвертое положение равновесия приобретает в этом случае упрощенный вид:  $(a / (b - g), a / (b - g))$ , т. е., лежит на линии  $x_1 = x_2$ . При условии  $g > b$  оно оказывается в отрицательной области.

Рассмотрим вопрос об устойчивости положений равновесия системы (12). Система допускает возможность аналитического рассмотрения вопроса об устойчивости положений равновесия посредством исследования линеаризованной системы (первый метод Ляпунова).

Точка  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  является неустойчивой при  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , то есть во всей интересующей нас области параметров. Для положения равновесия  $(x_1 = a_1 / b_1, x_2 = 0)$  условием

устойчивости является неравенство  $a_2 < -g_2 a_1 / b_1$ . Для положения равновесия ( $x_1 = 0, x_2 = a_2 / b_2$ ) условием устойчивости является неравенство  $a_1 < -g_1 a_2 / b_2$ . Условием устойчивости точки  $\left( \frac{a_2 g_1 + a_1 b_2}{b_1 b_2 - g_2 g_1}, \frac{a_2 b_1 + a_1 g_2}{b_1 b_2 - g_1 g_2} \right)$ , когда она расположена в области положительных значений переменных, является неравенство  $g_1 g_2 < b_1 b_2$ .

В зависимости от того, устойчива или нет каждая из трех точек равновесия за пределами начала координат, могут реализовываться различные варианты конкурентной системы.

## 2. Анализ основных вариантов поведения системы

Рассмотрим более подробно динамику конкурентных отношений при различном соотношении параметров модели (12). Для всех дальнейших вариантов и иллюстративных расчетов примем фиксированные значения следующих коэффициентов:  $a_1 = 1, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 1$  (реально это означает, что параметры автономного развития рассматриваемых сообществ идентичны и в этом смысле ситуация симметрична: никто не имеет априорного преимущества).

**Вариант 1.** Случай *сильного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| > b_1 b_2$  при *отрицательных* и примерно равных по абсолютному значению  $g_1$  и  $g_2$ .

Этот случай соответствует ситуации, отраженной на рис. 3, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является гибель одного из сообществ. При этом, в силу примерного равенства значений  $g_1$  и  $g_2$ , исход конкурентной борьбы заранее неясен, многое зависит от начальных условий и от того, насколько сильно конкурирующие сообщества могут влиять на значения  $g_1$  и  $g_2$ .

**Вариант 2.** Случай *сильного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| > b_1 b_2$  при *отрицательных* и существенно отличающихся по абсолютному значению  $g_1$  и  $g_2$ .

Этот случай тоже соответствует ситуации, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является



гибель одного из сообществ. Отличие от варианта 1 заключается в том, что исход борьбы заранее известен: побеждает актер, которому удалось найти уязвимые места противника и добиться решающего преимущества (рис. 4, где  $g_1 = -0,5$ ,  $g_2 = -4$ ).

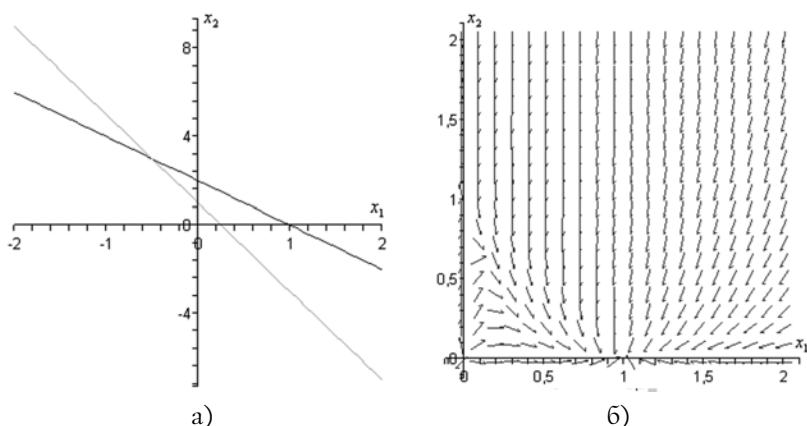


Рис. 4. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ( $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ ) и явного преимущества одной из сторон

Видно, что каково бы ни было исходное состояние, результат предрешен: побеждает сторона, использующая более эффективную стратегию конкурентной борьбы.

**Вариант 3.** Случай *умеренного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| < b_1 b_2$  при *отрицательных* значениях  $g_1$  и  $g_2$ .

Этот случай соответствует ситуации, отраженной на рис. 2, когда влияние конкурентного противоборства не настолько сильное, чтобы приводить к гибели кого-либо из соперников. В этом случае устанавливается новое состояние равновесия с *худшими* (чем в отсутствие конкуренции) характеристиками у всех сообществ. Ни одна из сторон не может победить, но ущерб терпят все (такая ситуация складывается, например, во время затяжных политических, этнических, конфессиональных конфликтов или торговых войн).

**Вариант 4.** Случай *умеренного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| < b_1 b_2$  при *положительных* значениях  $g_1$  и  $g_2$ .

Этот случай соответствует ситуации, когда взаимодействующие стороны, опасаясь поражения в конкурентной борьбе, мобилизуют резервы и, несмотря на противодействие противника, наращивают темпы роста, как это описано в (11). Если возможности для такого наращивания ограничены (например, ресурсными пределами) и выполняется условие  $|g_1 g_2| < b_1 b_2$ , то в результате устанавливается новое состояние равновесия с *лучшими* (чем в отсутствие конкуренции) характеристиками у всех сообществ (рис. 5, где  $g_1 = 0,5, g_2 = 0,5$ ).

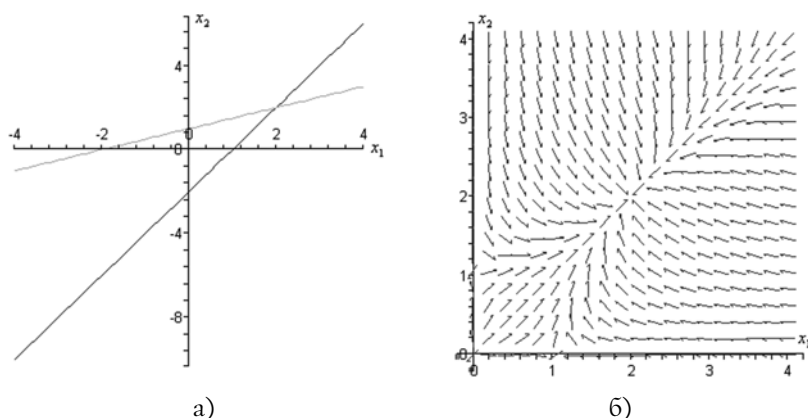


Рис. 5. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае умеренного конкурентного взаимодействия ( $|g_1 g_2| < b_1 b_2$ ) при положительных значениях  $g_1$  и  $g_2$

Таким образом, в данном случае конкуренция играет положительную роль, поскольку стимулирует интенсификацию производственных усилий соперничающих сторон, не приводя при этом к дестабилизации системы.

**Вариант 5.** Случай *сильного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| > b_1 b_2$  при *положительном* значении  $g_i$  и *отрицательном* значении  $g_j$ .

Этот случай соответствует ситуации, когда конкуренция усиливается и при этом одна из сторон в качестве своего

приоритета ставит не столько ухудшение состояния соперника, сколько достижение дополнительных преимуществ (например, за счет внедрения новых, более совершенных технологий)<sup>2</sup>. На рис. 6 показана ситуация, когда сторона 2, мобилизовав свои усилия на развитии и внедрив новые технологии, получает решающее конкурентное преимущество, что приводит к ее победе над соперником (на рисунке  $g_1 = -2$ ,  $g_2 = 2$ ).

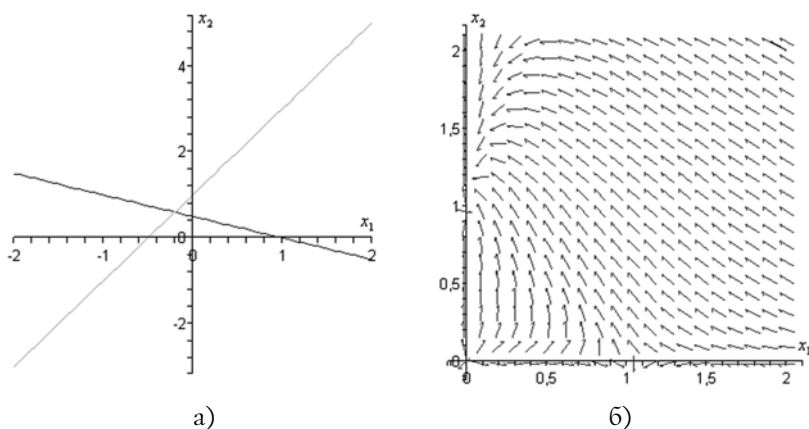


Рис. 6. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае сильного конкурентного взаимодействия ( $|g_1 g_2| > b_1 b_2$ ), когда значения  $g_1$  и  $g_2$  имеют разные знаки

Видно, что хотя сторона 2 сконцентрирована не столько на противоборстве, сколько на собственном развитии, в результате она достигает победы над конкурентом за явным преимуществом. Это достаточно типичная ситуация в современном бизнесе, когда фирма-лидер побеждает и поглощает своих менее удачливых конкурентов.

Особенностью данного варианта является то, что значения  $g_1$  и  $g_2$  имеют разные знаки. Такая ситуация возникает, в частности, при наличии жестких ресурсных ограниче-

2. Впрочем, получение конкурентных преимуществ одной стороной все равно, как правило, приводит к ухудшению состояния конкурирующей стороны.

ний (в том числе ограничений покупательского спроса, если речь идет о конкуренции фирм на потребительском рынке): в этом случае успех одной стороны автоматически ведет к проигрышу стороны-конкурента (так называемая «игра с нулевой суммой»). Такая ситуация благоприятна для возникновения монополизма, для подавления лидером всех своих конкурентов.

**Вариант 6.** Случай *сильного* конкурентного взаимодействия  $|g_1 g_2| > b_1 b_2$  при *положительных* значениях  $g_1$  и  $g_2$ .

Эта ситуация, соответствующая «игре с положительной суммой», когда все конкуренты стремятся вырваться вперед и при этом имеющихся ресурсов хватает на всех (либо конкурирующие стороны сами в процессе своей деятельности создают необходимые им ресурсы). В этом случае, несмотря на возможные расхождения в темпах развития, идет непрерывный (и убыстряющийся) рост всех конкурирующих сообществ, ни одно из которых в этой гонке не гибнет (рис. 7, где  $g_1 = 2, g_2 = 2$ )).

Частным случаем варианта 6 является режим роста с обострением, который обсуждался выше и которому соответствует уравнение (10). Этот режим встречается в моделях

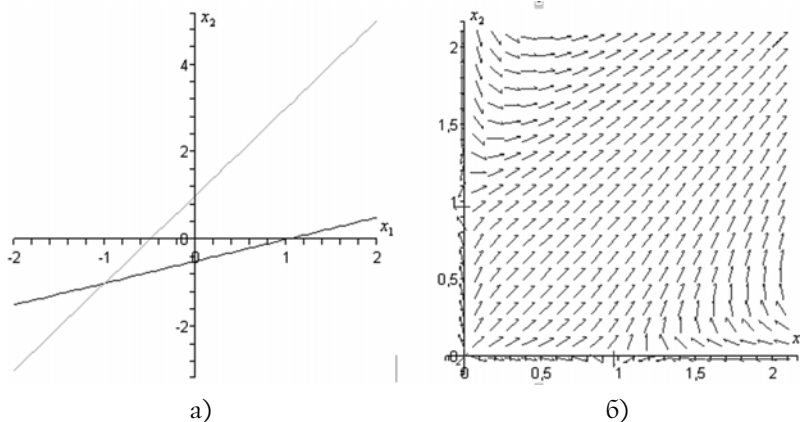


Рис. 7. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае *сильного конкурентного взаимодействия* ( $|g_1 g_2| < b_1 b_2$ ) при *положительных* значениях  $g_1$  и  $g_2$

долгосрочного демографического и экономического роста (Foerster et al, 1960; Марков, 2009; Андреев, 2009; Кирилук и Малков, 2011).

Таким образом, анализ системы (12) показывает, что в зависимости от особенностей внешних условий и от поведения сторон конкуренция может приводить как к ухудшению характеристик (и даже к гибели) взаимодействующих сообществ, так и к их непрерывному росту. Конкретный режим, который реализуется в результате конкуренции, определяется следующими условиями:

- 1) соотношение между величинами  $|g_1 g_2|$  и  $b_1 b_2$  (*сильное* или *умеренное* конкурентное взаимодействие);
- 2) знаки величин  $g_1$  и  $g_2$ ;
- 3) ограниченность или достаточность ресурсов (игра с нулевой или с положительной суммой).

### 3. Поведение системы в негрубых случаях

Выше были рассмотрены ситуации, когда поведение системы (12) является «грубым», по А.А. Андронову (Андронов, 1937). Такие ситуации реализуются, когда изоклины (14) пересекаются, порождая четыре точки равновесия (16)–(19). Однако возможны ситуации, когда первые две изоклины из (14) параллельны друг другу (тогда точек равновесия только три) или сливаются в одну прямую (тогда точек равновесия бесконечно много). Это становится возможным при выполнении условия  $g_1 g_2 = b_1 b_2$ . Наиболее интересными с точки зрения практических приложений являются следующие варианты.

**Вариант 7.** Случай  $g_1 g_2 = b_1 b_2$  при *отрицательных* значениях  $g_i$  и при  $a_2 g_2 \neq a_1 b_1$ .

В этом случае первые две изоклины из (14) параллельны друг другу. Этот случай соответствует ситуации, когда происходит жесткая конкуренция, результатом которой является гибель одного из сообществ. При этом исход борьбы заранее известен: побеждает сообщество, изоклина которого располагается дальше от начала координат (рис. 8, где  $g_1 = -0,5, g_2 = 2$ ).

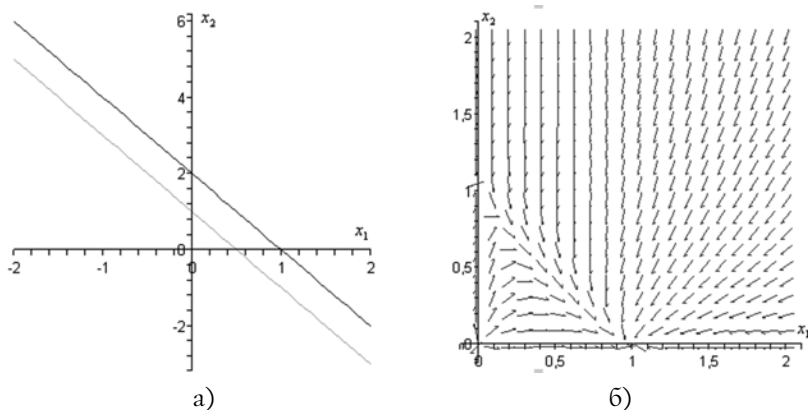


Рис. 8. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае  $g_1g_2 = b_1b_2$  при параллельном расположении изоклин

**Вариант 8.** Случай  $g_1g_2 = b_1b_2$  при отрицательных значениях  $g_i$  и при  $a_2g_2 = a_1b_1$ .

В этом случае первые две изоклины из (14) совпадают. Это соответствует ситуации, когда в ходе конкуренции возникает бесконечное множество состояний равновесия и система может устойчиво находиться в любой точке слившихся изоклин (рис. 9, где  $g_1 = -1, g_2 = -1$ ).

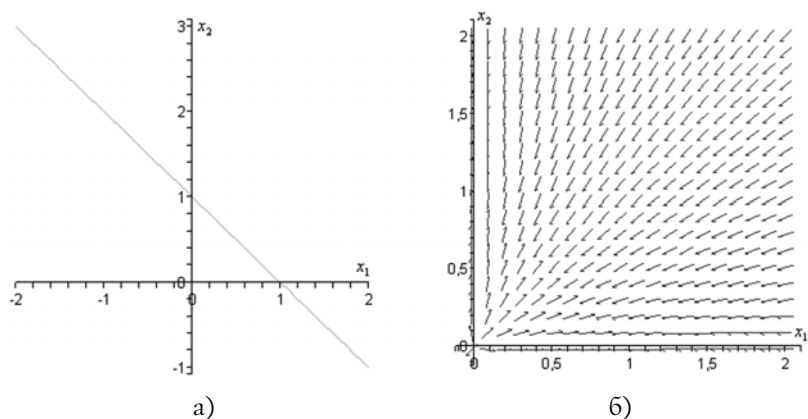


Рис. 9. Изоклины (а) и фазовый портрет (б) системы в случае  $g_1g_2 = b_1b_2$  при совпадающих изоклинах

Несмотря на кажущуюся экзотичность вариантов 7 и 8, они достаточно часто встречаются при экономическом моделировании и имеют большое содержательное значение. Однако это тема отдельного разговора, она будет обсуждена в следующей статье.

### **Заключение**

Таким образом, достаточно простая система уравнений может описывать как стремление к положениям равновесия в сообществах с конкуренцией (где она выступает как ограничитель), так и процессы роста, в том числе в режиме с обострением (где конкуренция выступает как стимул). Эта система позволяет также выяснить, при каких значениях параметров происходит переход от одного режима к другому.

Для тех негрубых случаев, где существует непрерывное множество положений равновесия, можно дать экономическую интерпретацию, что в таких случаях (точнее, в их близких окрестностях) экономические системы более управляемы.

В следующей статье будут рассмотрены конкретные модели, соответствующие изложенным выше базовым вариантам конкурентных взаимодействий.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Андреев В.В., Васильева Е.А.* Математическое моделирование и исследование динамики социально-экономической системы России // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2009. № 14. С. 25–38.
2. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады АН СССР, 1937. Т. 14. №5. С. 247–250.
3. *Балацкий Е.В.* Моделирование процессов межсекторальной конкуренции // Общество и экономика. 2008. №5. С. 54–70.
4. *Богданов Р.И.* Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. М.: Вузовская книга, 2008.
5. *Кирилук И.Л., Малков С.Ю.* Модель эндогенного роста в конкурентных системах // Математика. Компьютер. Образование. Сборник научных тезисов. Выпуск 18. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

6. Марков А.В., Коротаев А.В. Гиперболический рост в живой природе и обществе. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
7. Портер М.Э. Конкуренция. М.: Вильямс, 2005.
8. Рубин Ю.Б. Теория и практика предпринимательской конкуренции. М.: Маркет ДС Корпорейшн, 2004.
9. Чернавский Д.С., Щербаков А.В., Зульпукаров М.Г.М. Модель конкуренции. Препринт №64. М.: Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, 2006.
10. Foerster H., Mora P. M., Amiot L.W. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia // Science, 1960, 132 (3436): 1291–1295.



## 1.4. ОСОБЕННОСТИ ДОЛГОСРОЧНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ МИРОВОЙ СИСТЕМЫ: АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

*Кириллюк И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.*

Прикладная эконометрия. 2009. № 4 (16). С. 34–45.

На основе имеющихся данных проведен анализ экономического развития мировой экономики в индустриальную эпоху. Выделены группы стран по характеру их экономической динамики. Предложена модель, описывающая процессы коэволюционного экономического развития государств в мировой системе. Сделан вывод о неизбежности «фазового перехода» в мировой экономической динамике, аналогом которого в демографии является современный демографический переход.

**Ключевые слова:** макроэкономическая динамика, математическое моделирование, нелинейная регрессия.

**Keywords:** macroeconomic dynamics, mathematical simulation, the nonlinear regression.

**Благодарности:** Работа поддержана РФФИ (проекты №09-06-00052а, 08-06-00319а).

### 1. Введение

В последнее время ширится интерес к анализу данных, характеризующих взаимодействие различных государств на протяжении длительных периодов (десятки и сотни лет), и выявлению на основе этого исторических закономерностей. Например, в статье «Математическая модель влияния взаимодействия цивилизационного центра и варварской периферии на развитие Мир-Системы» (Коротаев и Гринин, 2008) рассматривался и моделировался процесс силового (военного) взаимодействия государств с разным уровнем политического

и технологического развития в доиндустриальную эпоху. В индустриальную эпоху (XIX—XXI вв. н.э.) существенно возросла роль экономических взаимодействий между странами, в связи с чем представляет интерес рассмотрение *экономического* развития мировой системы, взаимного влияния экономик различных стран и связанных с ним закономерностей на основе анализа имеющихся статистических данных.

## 2. Особенности экономической динамики мировой системы

Особенностью рассматриваемого периода развития мировой системы является сугубо нелинейный характер протекающих процессов. Иллюстрацией этому служит рис. 1, отражающий изменение мирового валового внутреннего продукта (ВВП) за последние две тысячи лет (данные взяты из (Коротаев и др., 2007)).

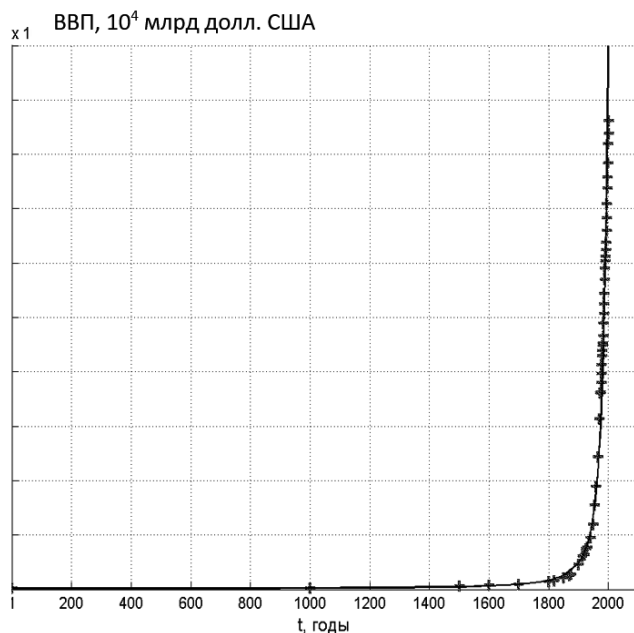


Рис. 1. Динамика мирового ВВП

Подобный вид имеют и многие другие макросоциальные и макроэкономические показатели, такие как численность населения мира, ВВП на душу населения, потребление энергоресурсов и т.п. В работах (Коротяев и др., 2007; Капица, 1999; Коротяев и др., 2005) показано, что динамика этих показателей с хорошей точностью аппроксимируется степенными зависимостями типа:

$$A(t) = C / (t_0 - t)^k, \quad (1)$$

где  $k > 0$  — показатель степени,  $C$  — константа (при  $k = 1$  уравнение (1) описывает гиперболический рост, т. е. аппроксимационная зависимость является гиперболой).

Характерной особенностью зависимости (1) является то, что при приближении момента времени к значению  $t_0$  значение  $A(t)$  начинает резко возрастать и устремляется к бесконечности (такое поведение именуется режимом с обострением (Князева и Курдюмов, 2002), а  $t_0$  называется моментом обострения). Разумеется, инфинитное изменение какого-либо показателя, особенно за конечный период времени, является математической идеализацией. Тем не менее, для определенных периодов времени аппроксимация параметров инфинитными кривыми оказывается весьма точной (см., например, рис. 1, где сплошная линия — аппроксимация типа (1) с  $k = 2$ ).

Гиперболический рост отражает развитие системы с *положительными обратными связями*, когда с ростом некоторой величины создаются дополнительные благоприятные условия для ее еще большего роста. М. Кремер объясняет факт гиперболического роста численности населения Земли развитием науки и технологий (Kremer, 1993). В современном обществе одним из механизмов положительной обратной связи является взаимное влияние нано-, био-, когнитивных и информационных технологий (Converging Technologies, 2003).

Анализ статистических данных (Кирилюк и др., 2007) показывает, что степенной рост характерен не только для

упомянутых выше характеристик развития мира в целом, но и для макроэкономических показателей отдельных стран. Так, динамика удельного ВВП на душу населения (ВВП/чел.) — показателя, широко используемого для оценки уровня экономического развития — для многих развитых стран в последние столетия хорошо аппроксимируется гиперболическими зависимостями (рис. 2), несмотря на наличие локальных осцилляций (причина осцилляций — периодически случающиеся экономические кризисы и войны).

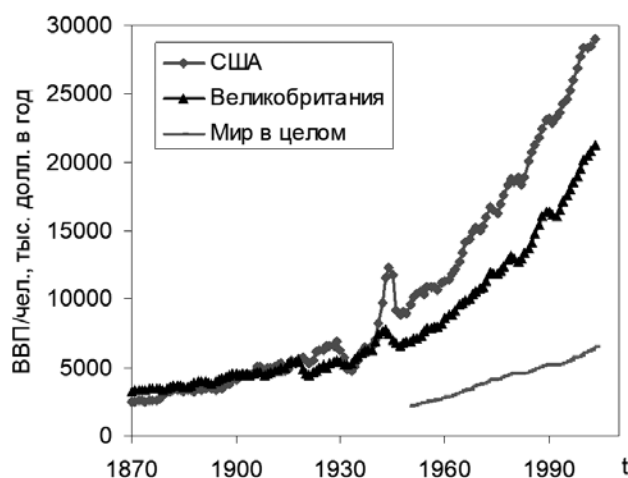


Рис. 2. Зависимость ВВП на душу населения (тыс. долл. в год) для ряда развитых стран и для мира в целом

Убыстряющиеся темпы экономического развития в целом приводят к увеличению разрыва между странами-лидерами и странами-аутсайдерами. С другой стороны, некоторые развивающиеся государства, изначально находившиеся на периферии мировой экономики, могут в определенный момент сделать рывок и начать развиваться с существенно более высокими темпами, чем мир в целом. Так, такие государства, как Гонконг, Сингапур, Тайвань и некоторые другие, имеют с некоторого момента времени существенно более крутую временную зависимость ВВП/чел., чем мир в целом или нынешний лидер — США (рис. 3).

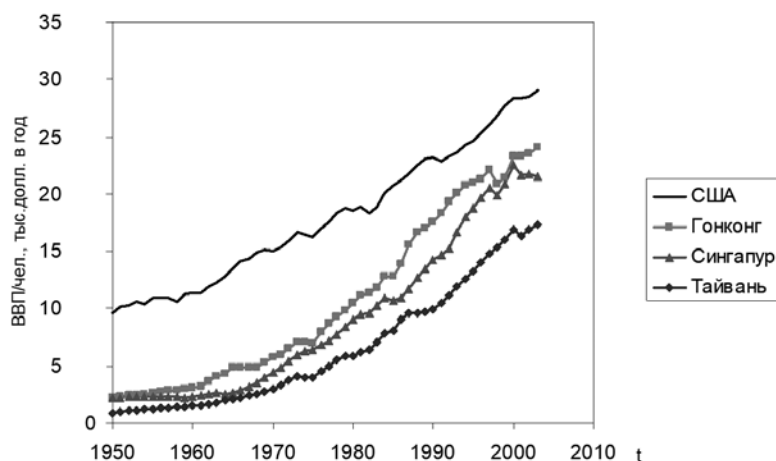


Рис. 3. Сравнение графиков зависимости ВВП на душу населения (тыс. долл. в год) от времени для США и ряда азиатских стран

(Кстати, похожая ситуация отражена и на рис. 2: США, первоначально отстававшие от Великобритании и стран Европы по уровню ВВП/чел., в конце XIX в. сделали рывок и стали лидером экономического развития.)

Для проведения сравнительного анализа параметров мирового экономического развития была проведена аппроксимация степенными зависимостями динамики значений ВВП/чел. для стран, представленных в базе А. Мэддисона<sup>1</sup>.

Аппроксимация производилась следующим образом: в исходном уравнении вида (1) производилась замена переменных — переход к натуральным логарифмам от показателя ВВП/чел.,  $Y_i = \ln(A_i(t))$  и преобразование времени по формуле  $\tau_i = \ln(t_0 - t_i)$ , где  $i$  — номера момента времени и соответствующего показателя в ряду данных.

По  $t_0$  проводился перебор от 2004 до 3004 г. (так как использовались имеющиеся данные по 2003 г. включительно). Такое преобразование координат приводит степенное уравнение к линейному, что позволяет (в предположении условий

1. <http://www.ggdc.net/maddison>

Гаусса—Маркова) применить обычную линейную аппроксимацию *методом наименьших квадратов*. При этом вычислялся коэффициент детерминации  $R^2$  и находились те значения  $t_0$ , для которых он максимален.

В результате для каждой страны получали аппроксимирующую степенную зависимость с набором параметров, соответствующих наилучшей аппроксимации эмпирических данных.

Для определения статистической значимости полученных регрессионных зависимостей рассчитывалась  $F$ -статистика по формуле  $F = \frac{R^2(N-2)}{1-R^2}$ , где  $N$  — величина выборки (длина временного ряда данных). Величина  $F$  имеет распределение Фишера с  $v_1 = 1$  и  $v_2 = N - 2$  степенями свободы. Вычисленный критерий  $F$  сравнивался с критическим значением  $F_{кр}$  при 5%-ном уровне значимости.

Оказалось, что отношение  $F/F_{кр}$  ни для одного из государств не опускается ниже значения 2,8. То есть для всех без исключения государств степенные аппроксимации являются статистически значимыми. Для стран с высоким коэффициентом детерминации это отношение порядка нескольких сотен.

Также была проведена оценка значимости коэффициентов регрессии, которая ее высокий уровень, особенно для зависимостей с  $R^2 > 0,9$ .

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

1) практически для всех стран Западной Европы динамика роста ВВП/чел. с весьма высокой точностью (коэффициент детерминации  $R^2 > 0,9$ ) аппроксимируется степенной зависимостью с  $k \approx 1$ . Множители и показатели степени аппроксимирующих функций для них близки между собой. Времена обострения  $t_0$  для всех стран, кроме Англии ( $t_0 = 2027$ ) и Швейцарии ( $t_0 = 2023$ ), находятся в пределах от 2010 до 2020 г. Близкие значения показателей характерны также для таких неевропейских стран, как США, Канада,

Бразилия, Мексика, Тайвань, Таиланд, Малайзия, Гонконг, Сингапур. Это группа экономически тесно связанных друг с другом государств;

2) для мира в целом динамика роста ВВП/чел. аппроксимируется степенной зависимостью с моментом обострения в 2015 г. при значении  $R^2 = 0,93$  и с хорошей точностью соответствует характеристикам развитых европейских стран;

3) фактически по всему миру есть страны, которые хорошо аппроксимируются степенной зависимостью ( $R^2 \geq 0,9$ ), но имеют времена обострения, отличающиеся от типичных для Западной Европы. Среди прочих это Польша, Венгрия, Чехословакия в Европе; Япония, Северная Корея, Пакистан, Израиль, Сирия в Азии; Аргентина, Чили, Колумбия, Коста-Рика в Латинской Америке; Ботсвана, Лесото, Мали в Африке и др.;

4) существует большое число стран, которые плохо аппроксимируются степенными функциями. Например, малые значения  $R^2 < 0,6$  характерны для стран бывшей Югославии и бывшего СССР (включая Россию), Никарагуа, Ирака, Объединенных Арабских Эмиратов, значительного количества африканских стран и др. Невысокие значения  $R^2$  при высоких темпах развития характерны для Китая и Индии.

Основное, что демонстрирует исследование — это факт наличия довольно большой группы стран со сходной динамикой ВВП/чел. (сюда входят практически все страны Западной Европы, США, Канада и ряд относительно благополучных незападных стран) и совокупности остальных стран, динамика ВВП/чел. которых имеет сильный разброс по характеристикам и носит индивидуальный характер (рис. 4).

Сходный характер динамики показателя ВВП/чел. для первой группы стран позволяет говорить о коэволюционном характере их развития, причиной которого являются тесные экономические связи и встроенность в единую экономическую систему.

Коэволюция предполагает гармоничное совместное развитие подсистем (Князева и Курдюмов, 2002). Если принцип

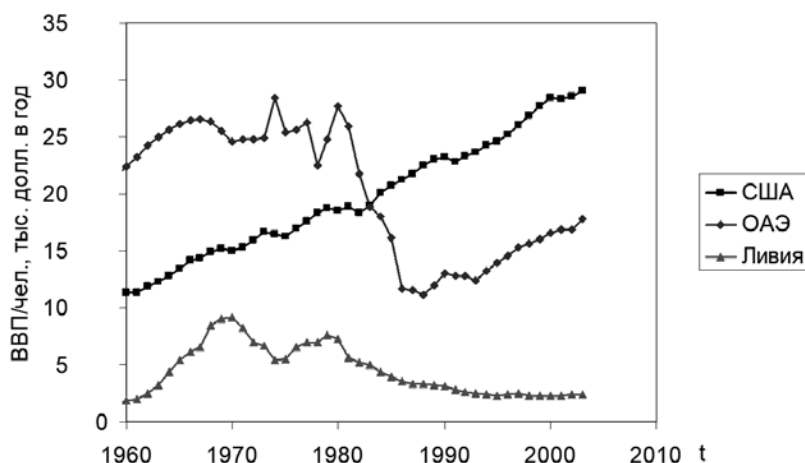


Рис. 4. Сравнительная динамика ВВП/чел. (тыс. долл. в год) в США и в странах, динамика которых не аппроксимируется степенной функцией

коэволюции нарушается, то в системе может возникнуть дисбаланс, приводящий к ее разрушению. Мы попытаемся дать некоторое формализованное описание понятия коэволюции как некоей синхронизации развития подсистем, когда они достаточно эффективно эволюционируют и отставание одной подсистемы от другой не превышает определенной величины. Ниже приводится простейшая модель такой системы.

### 3. Модель коэволюционного развития динамических систем с гиперболическим ростом

Рассмотрим простую модельную систему вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x^\alpha - c_1(x - y) + f(x) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y^\alpha + c_2(x - y) + \phi(y) \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Уравнения (2) описывают динамику и взаимодействие двух нелинейных систем. Первая система характеризуется переменной  $x(t)$ , вторая — переменной  $y(t)$ . (Если в качестве взаимодействующих систем рассматриваются два государства, то в качестве  $x(t)$  и  $y(t)$  могут выступать такие величины, как их население, ВВП, ВВП на душу населения и т.п.) Первые члены в правых частях уравнений отражают характер роста  $x(t)$  и  $y(t)$ . Вид этих членов выбран таким образом, чтобы зависимости  $x(t)$  и  $y(t)$  имели степенной вид типа (1). Показатели степени  $\alpha$  имеют значение, равное 1 для случая экспоненциального роста, 2 — для обычной гиперболы ( $k = 1$ ) и 1,5 — для случая квадратичной гиперболы ( $k = 2$ ). Для простоты будем считать, что коэффициенты в (2) постоянны и  $a = a_2$ , т. е. системы эволюционируют по одинаковым законам. При этом первая система имеет лидирующие позиции, что отражается условием  $x_0 > y_0$ . Вторые члены в правых частях уравнений (2) отражают наличие связей между рассматриваемыми системами, коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  характеризуют интенсивность этих связей. В качестве таких связей можно рассматривать, например, обмен материальными ресурсами — торговлю (предельный случай только материального обмена выражается равенством  $c_1 = c_2$ ) или же обмен информацией (в случае чисто информационного одностороннего влияния со стороны системы-лидера имеем  $c_1 = 0$ ). Функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  нужны для описания выхода систем из развития с обострением (когда  $x(t)$  и  $y(t)$  устремляются к бесконечности); однако нас будут интересовать ситуации до момента обострения и в этом случае функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  могут не рассматриваться (мы будем считать их нулевыми). Все начальные условия и коэффициенты считаем положительными (это подразумевает, что система-лидер в среднем положительно влияет на другую систему, что бывает, разумеется, не всегда). Аналитическое решение системы (2) в общем виде найти не удалось, однако для частных случаев аналитические решения существуют.

При  $c_1 = c_2 = 0$  получаем две изолированные (автономные, не зависящие друг от друга) системы со степенным

ростом типа (1), имеющие каждая свой собственный (при несовпадающих начальных условиях) момент обострения  $t_0$ .

При  $c_1, c_2 > 0$  ситуация изменяется. Кривые сближаются и момент обострения становится общим: система-лидер  $x$  «увлекает» за собой отстающую систему  $y$ , убыстряет темп ее развития. Это происходит, правда, ценой смещения момента обострения в сторону больших  $t$ . Общий момент обострения наступает позже, чем у автономной системы  $x$ , но раньше, чем у автономной системы  $y$ .

Разницу между автономным и совместным развитием двух систем при  $\alpha = 2$  демонстрирует рис. 5.

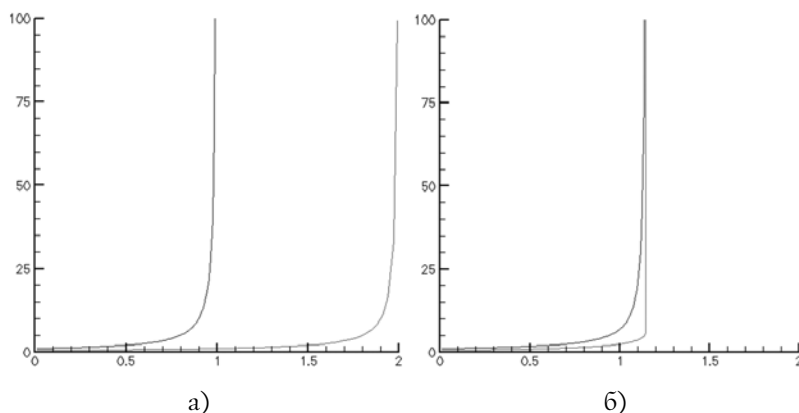


Рис. 5. Различие между автономным (а) и связанным (совместным) (б) развитием двух систем при различии стартовых условий ( $x_0 > y_0$ ). Темная кривая —  $x(t)$ , светлая кривая —  $y(t)$ , время  $t$  отображается по оси абсцисс в относительных единицах

Видно, что у взаимодействующих систем момент обострения становится общим, при этом темпы роста догоняющей системы становятся выше темпов роста системы-лидера. Важно, что коэволюция систем становится возможной даже при относительно слабой связи между ними.

Полученные результаты позволяют объяснить эффект опережающих темпов роста величины ВВП/чел. для ряда догоняющих стран (см. рис. 3). Для относительно небольших

догоняющих стран система (2) может быть упрощена и сведена к одному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y^\alpha + c_2 (x - y) + \varphi(y), \quad (3)$$

где переменная  $x$ , характеризующая страну-лидера, изменяется независимо от догоняющей страны (так, обратное влияние, например, Гонконга на США можно считать пренебрежимо малым) и задается извне (например, в соответствии с уравнением (1)).

Уравнение (3) решалось численно методом Рунге-Кутты. На рис. 6 приведено решение  $y(t)$  уравнения (3) (правая кривая) при заданной зависимости  $x(t)$  (левая кривая), имевшей степенной вид. Поскольку расчеты проводились до момента обострения, то считалось, что  $\varphi(y) = 0$ .

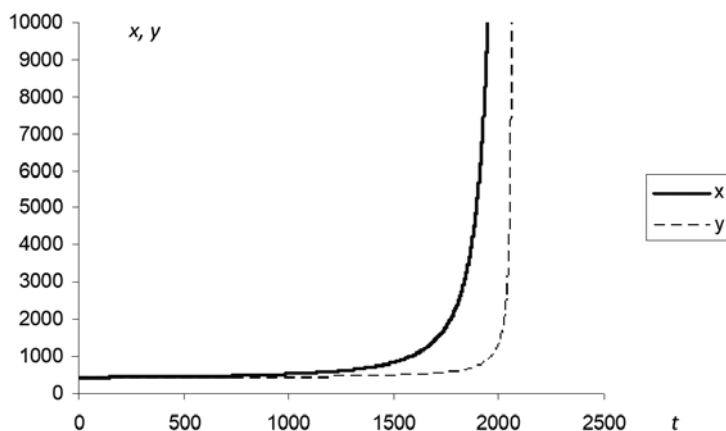


Рис. 6. Динамика взаимодействия догоняющей страны и страны-лидера согласно модели (3) (левая кривая — страна-лидер, правая кривая — догоняющая страна;  $x$ ,  $y$  и  $t$  даны в относительных единицах)

Из сравнения рис. 5 и 6 видно, что, несмотря на свою простоту, модель (3) достаточно хорошо отражает наблюдаемую экономическую динамику в системе взаимодействующих государств с разными уровнями развития.

В целом, наличие общего момента обострения, как следует из модели (2), является ярким индикатором того, что рассматриваемые государства (возможно, очень несхожие по другим показателям) образуют целостную экономическую систему, находятся в режиме коэволюции.

С этой точки зрения, можно говорить о том, что страны Западной Европы, США, Канада, Бразилия, Тайвань, Малайзия, Гонконг, Сингапур и ряд других, имеющие близкие моменты обострения для величины ВВП/чел., составляют единую коэволюционирующую экономическую систему, своеобразный макроэкономический кластер.

Дополнительная информация об экономической эволюции мировой системы может быть получена из анализа распределения стран мира по величине ВВП/чел.

#### 4. Распределение стран мира по уровню экономического развития

Интересные результаты дает анализ особенностей распределения стран мира по величине ВВП/чел. в формате «ранг–размер» (когда страны ранжируются в соответствии с величиной их ВВП/чел.: чем больше ВВП/чел., тем меньше значение  $r$ , характеризующее ранг страны).

Распределение «ранг–размер» стран мира по величине их ВВП/чел. в 2003 г. приведено на рис. 7 (данные взяты из базы А. Мэддисона<sup>2</sup>).

Из рис. 7а видно, что данное распределение хорошо аппроксимируется экспонентой (коэффициент детерминации  $R^2=0,99$ ), особенно для стран с относительно низким значением ВВП/чел. Страны с высоким значением ВВП/чел. явно выпадают из этой зависимости (это особенно наглядно видно на рис. 7б, где данные представлены в логарифмическом масштабе). Для стран с высоким значением ВВП/чел.

2. [www.ggdnet/maddison](http://www.ggdnet/maddison)

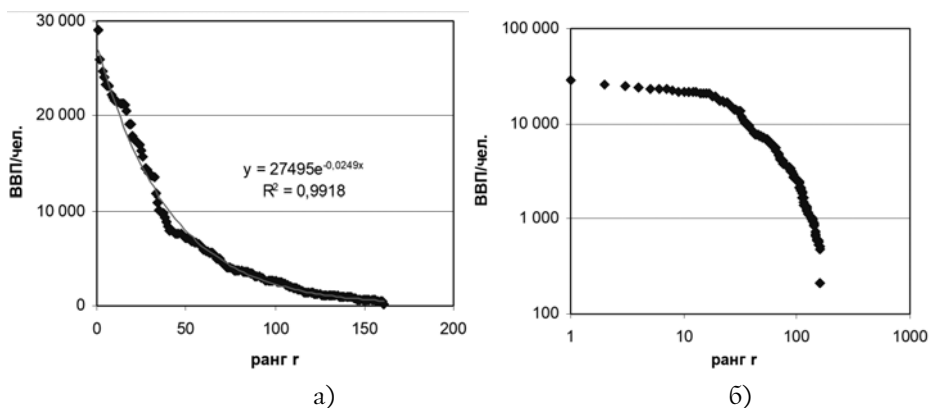


Рис. 7. Распределение «ранг—размер» стран мира по величине их ВВП/чел. (долл.) в 2003 г.: а) — исходный масштаб, б) — логарифмический масштаб

более характерна степенная аппроксимация (в логарифмических координатах она имеет вид прямой линии) вида:

$$w(r) = a/r^b, \quad (4)$$

где  $r$  — ранг (порядковый номер страны в ряду по степени уменьшения значения ВВП/чел.),  $w(r)$  — значение ВВП/чел. в рассматриваемом году в стране, имеющей ранг  $r$ ;  $a$  и  $b$  — положительные коэффициенты.

Более детальный анализ подтверждает предположение о разном типе рангового распределения для стран с высоким и низким значением ВВП/чел.

На рис. 8 представлено ранговое распределение (в логарифмических координатах) наиболее развитых стран Западной Европы, США, Канады и Австралии по величине их ВВП/чел. для трех временных срезов (1950, 1975 и 2000 г.).

На рис. 9 представлено ранговое распределение незападных стран с населением, превышающим 10 млн человек (на 2000 г.), и имеющих среднее и низкое значение ВВП/чел. (ограничения на количество населения введены, чтобы исключить мелкие государства, играющие незначительную роль в мировой экономике).

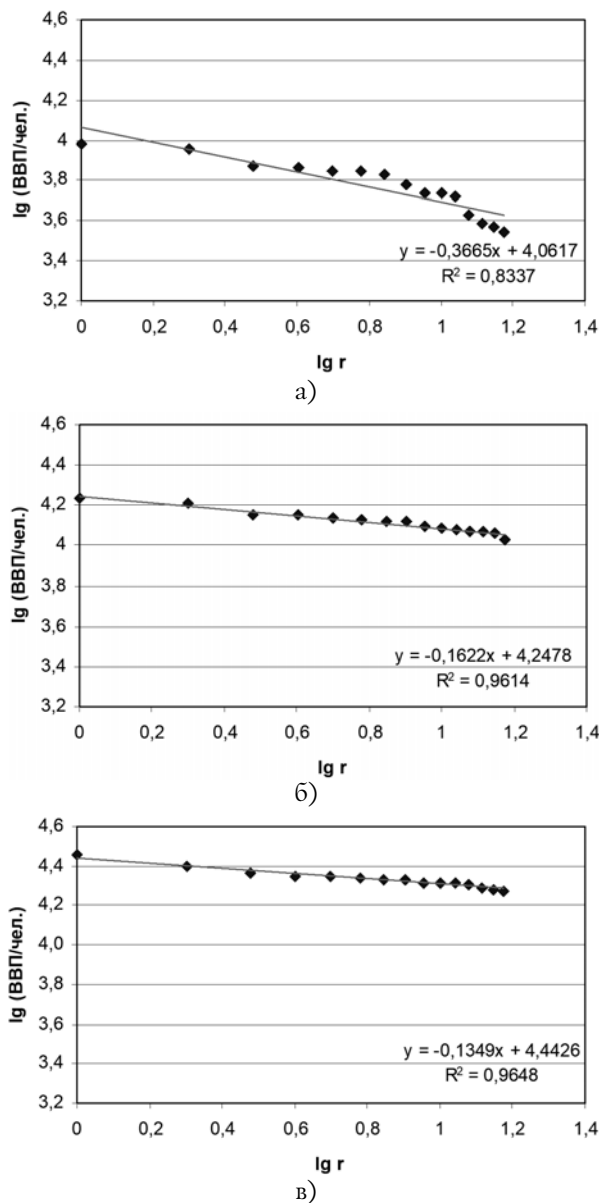


Рис. 8. Ранговое распределение (в логарифмических координатах) наиболее развитых стран Западной Европы, США, Канады и Австралии по величине их ВВП/чел. для трех временных срезов: а) 1950 г., б) 1975 г., в) 2000 г.

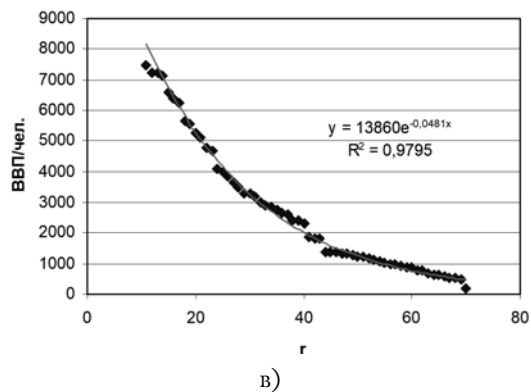
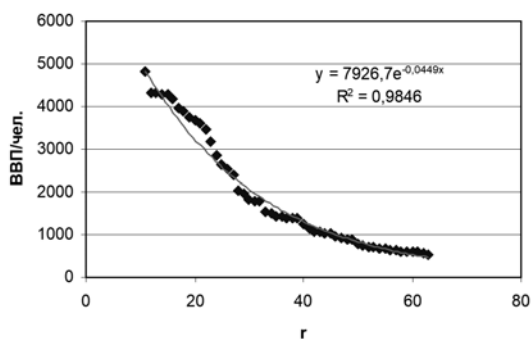
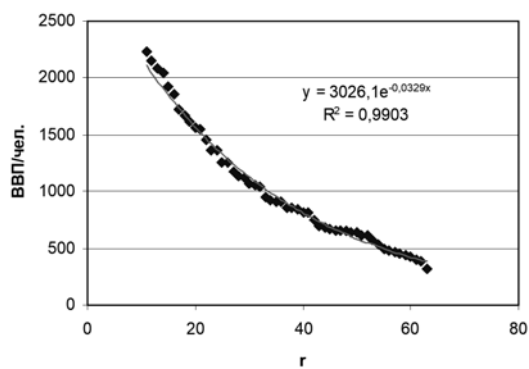


Рис. 9. Ранговое распределение незападных стран с населением, превышающим 10 млн человек (на 2000 г.), и имеющих среднее и низкое значение ВВП/чел. для трех временных срезов: а) 1950 г., б) 1975 г., в) 2000 г.

Анализ представленных данных показывает следующее.

1. Среди стран мира можно выделить два крупных кластера, каждый из которых описывается своим ранговым законом распределения:

- кластер, включающий развитые страны Западной Европы, США, Канаду, Австралию (15 государств);
- кластер незападных стран со средним и низким значением ВВП/чел. (большинство государств мира).

Кроме того, можно выделить кластер примерно из 15 стран, составляющих переходную группу между первым и вторым кластерами.

2. Первый кластер (развитые страны Запада) хорошо описывается *степенным* ранговым распределением, что свидетельствует о том, что эти страны представляют собой единое системное целое (по крайней мере в экономическом смысле). Степенные распределения возникают в результате интенсивного конкурентного взаимодействия развивающихся систем (Трубников, 1993; Подлазов, в печати). Такие отношения действительно характерны для данной группы государств. При этом рис. 8 свидетельствует, что разница уровней ВВП/чел. для государств этой группы с течением времени уменьшается, а ранговое распределение все лучше описывается степенным законом (значение коэффициента детерминации  $R^2$  увеличивается), т. е. первый кластер становится все более однородным.

3. Второй кластер на протяжении всего послевоенного периода хорошо описывается *экспоненциальным* ранговым распределением (см. рис. 9). Дать убедительную интерпретацию устойчивости экспоненциальной аппроксимации для этого кластера пока не удалось. Возможно, экспоненциальный вид распределения свидетельствует о слабости системных связей внутри этого кластера и о превалировании внутренних процессов в экономическом развитии входящих в кластер государств. При этом минимальные значения ВВП/чел. в этом кластере на протяжении последних пятидесяти лет изменяются слабо, а максимальные растут, стремясь подтянуться к странам-лидерам.



4. Третий (промежуточный) кластер неустойчив по составу и не поддается убедительной аппроксимации. В этот кластер входят страны, которым по каким-то причинам удалось приблизиться к странам первого кластера по уровню ВВП/чел. (причины могут быть различными: освоение передовых технологий и завоевание ниши в мировом разделении труда, поставки на мировой рынок востребованных минеральных ресурсов и т.п.).

5. Если в первом кластере однородность повышается, то во втором кластере она снижается, а в целом неоднородность распределения стран по уровню ВВП/чел. увеличивается. При этом страны-лидеры все сильнее отрываются от стран-аутсайдеров. Эта ситуация является иллюстрацией концепции «золотого миллиарда»: «золотой миллиард» — это страны первого кластера, противостоящие остальному миру.

## 5. Заключение

В целом, анализ и аппроксимация макроэкономических статистических данных позволяет выявлять важные эмпирические закономерности мировой динамики, требующие теоретического осмысления. Проведенный анализ позволяет утверждать, что связи между странами-лидерами усиливаются, они находятся в режиме коэволюционного развития, их кластер становится более однородным. С другой стороны, их разрыв с экономической периферией мировой системы нарастает. В целом, ситуация очень динамичная и неустойчивая; момент обострения (аппроксимации дают его оценку в диапазоне 2015–2020 гг.) близок. Скорее всего близость момента обострения означает, что в ближайшие годы произойдет критическое накопление диспропорций и разбалансировка существующей модели мирового экономического развития, что приведет к кризису и кардинальному реструктурированию мировой экономики, смене парадигм, моделей и механизмов развития, к своеобразному «фазовому переходу», аналогом которого в демографии является современный демографический переход (*Катица, 1999*).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Катица С.П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества. М., 1999.
2. *Кирилук И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.* Нелинейные особенности развития и взаимодействия социально-экономических систем // *Стратегическая стабильность*. 2007. №2. С. 62–68.
3. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. СПб.: Алетейя, 2002.
4. *Коротаев А.В., Гринин Л.Е.* Математическая модель влияния взаимодействия цивилизационного центра и варварской периферии на развитие Мир-Системы // *История и математика. Модели и теории*. Отв. ред. Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев, С.Ю. Малков. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов. Демография, экономика, войны / Отв. ред. Н.Н. Крадин. М.: КомКнига, 2005.
6. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-системы. Демография, экономика, культура / Отв. ред. Н.Н. Крадин. М.: КомКнига, 2007.
7. *Подлазов А.В.* Закон Ципфа и модели конкурентного роста (в печати).
8. *Трубников Б.А.* Закон распределения конкурентов // *Природа*. 1993. Т. 11. С. 3–13.
9. *Converging Technologies for Improving Human Performance: Nanotechnology, Biotechnology, Information Technology and Cognitive Science.* (Report, published in 2003 by Kluwer Academic Publishers).
10. *Kremer M.* Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 // *The Quarterly Journal of Economics* 1993, 108: 681-716. DOI: 10.2307/2118405.

Раздел 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ИНСТРУМЕНТАРИЙ  
ИНСТИТУЦИОНАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА

## 2.1. РОССИЙСКАЯ МОДЕЛЬ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ: ОПЫТ ЭМПИРИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

*Кирдина С., Кириллук И.,  
Рубинштейн А., Толмачева И.*

Вопросы экономики. 2010. № 11. С. 97–114.

Действующие модели институциональных изменений неоднократно описаны на логическом и вербальном уровнях. Что касается количественных оценок, то они зачастую отражают обобщенное мнение экспертов. Поэтому для такого рода работ характерна недостаточная эмпирическая база институциональных исследований (*Клейнер, 2004, с. 9; Фролов, 2008, с. 69*) и статистических расчетов. Если в целом в экономической науке за последние десятилетия произошел «эмпирический поворот», т. е. в общем объеме публикаций ведущих экономических журналов относительно и абсолютно растет число прикладных работ (*Либман, 2007, с. 10*), то в области анализа институциональных изменений, в том числе в России, *эмпирико-статистических исследований* пока немного.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-06-80031 и РГНФ, грант 08-03-00006а.

## Институциональные изменения и законодательный процесс

Процесс институциональных изменений, следуя Д. Норту, можно понимать как изменение формальных и неформальных правил, норм и принуждений, составляющих институциональную среду общества<sup>1</sup>. Каковы роль и соотношение формальных и неформальных правил в этом процессе?

С одной стороны, как отмечает Норт, неформальные ограничения выступают «продолжением, развитием и конкретизацией формальных правил и хорошо способны к выживанию благодаря тому, что составляют часть привычного поведения людей» (Норт, 1997, с. 108). При этом «неформальные ограничения меняются иными темпами, нежели формальные правила» (Норт, 1997, с. 113), поэтому процесс конкретизации в них установленных формально правил более длительный. В силу этого динамика неформальных ограничений, возникающих в более глубоких социальных слоях, гораздо сильнее подвержена инерции.

С другой стороны, неформальные правила повседневной жизни, постепенно меняясь и шлифуясь в ходе социальных практик, подготавливают почву для последующих формальных изменений. Таким образом, именно формальные правила призваны закреплять на общественном уровне полезные рутины, доказавшие свою целесообразность. Кроме того, они легализуют процедуры, необходимые для развития и обновления социальных, экономических и политических отношений, поскольку формируют единую легитимную платформу взаимодействия участников, включенных в эти процессы.

Исходя из такой диалектики соотношения формальных и неформальных ограничений, можно согласиться с тем, что

---

1. В подходе Норты мы разделяем рассмотрение институтов как целостной конструкции, включающей как формальные (конституции, общее право, инструкции) и неформальные (соглашения, нормы и кодексы поведения) ограничения на человеческие действия, так и принуждение к их исполнению (см.: (North, 1993)). С этой точки зрения бытующее разделение институтов на «формальные» и «неформальные» представляется поверхностным.

изменение формальных правил выступает «ведущим звеном» институционального развития. В них выражается наиболее динамичная и заметная часть инкрементального (*Норт, 1997, с. 115*) по своей природе процесса институциональных изменений. В связи с этим при изучении процесса институциональных изменений, в том числе в современной России, вполне оправданно сконцентрироваться на анализе формальных правил.

Как известно, основу комплекса формальных правил того или иного общества образует национальное законодательство. Это определило наш выбор *законодательного процесса в качестве основного репрезентанта институциональных изменений*<sup>2</sup>. В данном случае мы следуем общепринятому подходу. Так, в классификации Всемирного банка, разработанной для сопоставления прогресса в области институциональных изменений (в странах с переходной экономикой), на первое место также поставлены законодательство и институты в экономической сфере (наряду с приватизацией, состоянием банковского сектора и ролью правительства)<sup>3</sup>.

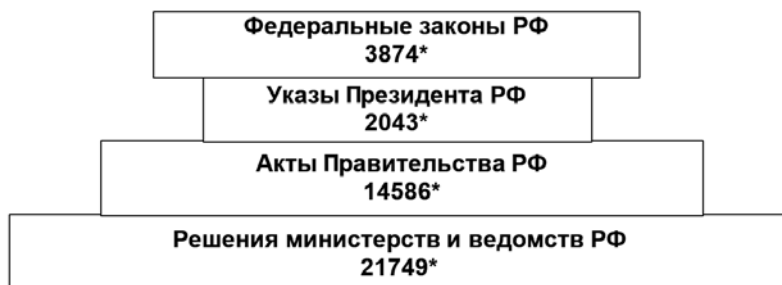
В отличие от содержательного анализа законотворческой практики, проводимого законодательными структурами<sup>4</sup> или правоведами<sup>5</sup>, в нашем исследовании речь идет преимущественно о количественных характеристиках изменения как институциональной среды, так и модели институциональных преобразований. Формирование национального законодательства, отражающее процесс институциональных изменений, происходит в результате деятельности высших органов

2. За пределами анализа в данном случае остается правоприменительная практика, в которой происходят апробирование и «жизнь» правовых норм. Этому посвящены специальные исследования (см., например: (*Вопленко и Рожнов, 2004; Рожнов, 1999*) и др.).
3. См.: (*Развитие российского..., 2007*).
4. С 2004 г. Совет Федерации Федерального Собрания РФ регулярно публикует и размещает в Интернете «Доклады о состоянии законодательства в Российской Федерации» для мониторинга правового обеспечения внутренней и внешней политики государства. В докладах отражаются базовые тенденции в развитии российского законодательства ([www.council.gov.ru/print/lawmaking/report/2006/24/index.html](http://www.council.gov.ru/print/lawmaking/report/2006/24/index.html)).
5. Актуальные проблемы государственного строительства. Вып. 2 // Аналитический вестник Совета Федерации ФС РФ. 2002.

представительной и исполнительной ветвей государственной власти. Именно они обладают правом законодательной инициативы и участвуют в процессе принятия законов.

Институциональная среда, прежде всего ее формальная подсистема, характеризуется иерархической структурой. Так, Норт пишет, что формальные правила «связаны друг с другом иерархическими зависимостями, где изменение каждого уровня иерархии требует больших затрат, чем изменение предыдущего уровня» (Норт, 1997, с. 108). Иерархический порядок взаимодействия формальных правил определяется тем, что некоторые из них более значимые и крупные, другие представляют их составные части, конкретизирующие отдельные стороны явления или процесса, регулируемого формальными правилами более высокого уровня. С этой точки зрения, самыми важными в макроэкономическом и социальном отношении представляются изменения, которые фиксируются на высшем уровне законодательной деятельности.

Иерархия законодательства современной России схематически показана на рис. 1. Можно видеть, что соподчиненность формальных правил (правовых документов, принимаемых на каждом уровне) соответствует иерархии системы государственной власти в Российской Федерации.



\* Указано количество документов за 1994–2009 гг., по данным справочной правовой системы «КонсультантПлюс». При подсчете указов президента не учитывались их многочисленные редакции.

Рис. 1. Иерархия формальных правил (правовых документов) в современной России

На вершине «пирамиды» находятся федеральные законы, принимаемые исключительно законодательным (представительным) органом государственной власти РФ (Федеральным Собранием) по предметам ведения РФ и ее субъектов. К ним также относятся законы, принятые непосредственно народом путем всероссийского референдума. Федеральные законы принимаются как в традиционной форме, так и в виде основных принципов регулирования, основ законодательства или кодекса<sup>6</sup>. Это акты высшей юридической силы.

Историческая практика свидетельствует, что в нашем государстве принятие важнейших политических и экономических решений нечасто было оформлено правовыми актами высшего уровня. Как в дореволюционную, так и в советскую эпохи, количество законов по сравнению с иными документами, прежде всего указами, невелико. Например, в советский период доминировали следующие формы законодательных актов: указы Президиума Верховного Совета СССР (продолжал активно их принимать вплоть до 1993 г.); постановления ЦК КПСС, в том числе совместные с правительством и/или профсоюзами (*Ремингтон, 2004, с. 28*). Общее количество принятых в СССР (России) законов в разные периоды представлено в табл. 1.

Как можно видеть, в СССР принималось очень мало законов, даже во времена так называемой «оттепели» (в 1960-е годы), — менее 15 законов ежегодно (для сравнения: в России в 2009 г. было принято 403 закона!).

На следующем уровне иерархии находятся указы Президента Российской Федерации. Они включают решения нормативного и индивидуального характера, принимаемые главой государства в пределах его компетенции по наиболее важным вопросам. При этом указы, восполняющие законодательные пробелы, действуют вплоть до принятия соответствующих федеральных законов: предполагается, что

6. Энциклопедический словарь «Конституционное право России», ст. 738. <http://slovari.yandex.ru/dict/constitution/article/art/cons-738.htm>.



Таблица 1. Законотворчество российского парламента, 1937–2009 гг.

| Период                                                                     | Количество принятых законов |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Сталинский период, ноябрь 1937 – март 1954 г.                              | 120                         |
| Постсталинский период, март 1954 – июнь 1966 г.                            | 174                         |
| Период правления Горбачева, Верховный Совет СССР, июнь 1989 – июль 1991 г. | 112                         |
| Верховный Совет РСФСР, июнь 1990 – июль 1993 г.                            | 222                         |
| Государственная дума РФ 1-го созыва, январь 1994 – декабрь 1995 г.         | 464                         |
| Государственная дума РФ 2-го созыва, январь 1996 – декабрь 1999 г.         | 1036                        |
| Государственная дума РФ 3-го созыва, январь 2000 – июнь 2003 г.            | 723                         |
| июль 2003 – декабрь 2003 г.                                                | 102                         |
| Государственная дума РФ 4-го созыва, январь 2004 – декабрь 2007 г.         | 1076                        |
| Государственная дума РФ 5-го созыва, январь 2008 – декабрь 2009 г.         | 743                         |

Рассчитано по: (Ремингтон, 2004, с. 32) (данные до 2003 г.); справочная правовая система «КонсультантПлюс». <http://base.consultant.ru> (данные за 2003–2009 гг.).

в дальнейшем президент обязан внести в Государственную думу соответствующий проект закона<sup>7</sup>.

Следующий уровень иерархии правовых решений составляют акты Правительства Российской Федерации. Они отражают решения, принимаемые им в пределах конституционных полномочий на основе и во исполнение

Конституции РФ, федеральных законов и нормативных указов Президента РФ. Акты правительства РФ, имеющие нормативный характер (а также наиболее важные из ненормативных актов), издаются в форме постановлений, а акты по оперативным и другим текущим вопросам – в форме распоряжений. Они не должны противоречить законодатель-

7. Энциклопедический словарь «Конституционное право России», ст. 717. <http://slovari.yandex.ru/dict/constitution/article/art/cons-717.htm>).

ным актам, стоящим выше актов правительства в иерархии системы законодательства<sup>8</sup>.

Наконец, законодательную институциональную среду формируют также решения министерств и ведомств. Это нормативные правовые акты (приказы, инструкции и др.), принимаемые для реализации своих полномочий<sup>9</sup>. Данные документы находятся на более низком уровне иерархии, чем акты правительства, и тем более указы президента и федеральные законы.

Документы высшей юридической силы — федеральные и федеральные конституционные законы — составляют в среднем 9% от принимаемых в стране правовых актов. В отдельные годы их доля колебалась от 6 до 18% (см. Приложение 1). Полагаем, что значимость их относительной величины, как и многочисленность федеральных законов (в среднем принимается 200–300 законов в год), позволяет использовать статистику «вершины законодательного айсберга» для анализа количественных изменений во всей законодательной институциональной среде страны. В силу иерархического характера институционального пространства, в котором формальные правила верхнего уровня выступают основаниями для дальнейшей конкретизации отдельных процессов на нижних уровнях, динамическую информацию высшего уровня (т. е. федеральных законов) также можно использовать для оценки институциональных изменений в целом.

Важной характеристикой институциональной среды (помимо иерархического характера) выступает ее *плотность*. Показателем плотности, или институциональной насыщенности среды, может служить субъективное ощущение индивидами достаточной степени регуляции отношений в сфере их деятельности (Клейнер, 2004, с. 45; Василенко, 2008). В свою очередь, объективными показателями плот-

---

8. Энциклопедический словарь «Конституционное право России», ст. 017. <http://slovari.yandex.ru/dict/constitution/article/art/cons-017.htm>.

9. Первое эмпирико-статистическое исследование данного сегмента формальной составляющей институциональной среды в современной России см. в: (Павлов, 2010).

ности институциональной среды выступает количество необходимых формальных правил — в нашем случае законов, а также их структура. Количество законов косвенно свидетельствует о наборе необходимых процедур, регулирующих взаимодействия субъектов. Структура законов характеризует сферы правового и нормативного регулирования разнообразных сторон общественной деятельности — экономической, политической и др.

Применительно к России 1990-х годов исследователи говорили об «институциональной недостаточности» (Тамбовцев, 1997), выражающейся в дефиците необходимых формальных правил, что привело к распространению неформальных норм, выражающих, как правило, локальные интересы. Это связано с тем, что недостаточное развитие формальных (законодательно закрепленных) норм компенсируется выработкой неформальных правил, которые заполняют институциональные пустоты, как правило, отражая интересы групп, имеющих сравнительное силовое преимущество. В подобных условиях регулирующая роль государства характеризуется структурной недостаточностью, ей присуща «институциональная слабость». Это означает, что государство не в состоянии контролировать свою территорию, гарантировать безопасность своим гражданам, поддерживать господство закона, обеспечивать защиту прав человека, эффективное управление, экономическое развитие и производство общественных благ.

Недостаточная плотность институциональной среды усиливает неполноту экономических и политических отношений. Каждая сторона экономического или политического контракта трактует неурегулированные ситуации в свою пользу. Неформальные договоренности, достигнутые в условиях недостаточной доверительности, могут быть нарушены при изменении обстоятельств, меняющих распределение издержек и выгод между партнерами.

В свою очередь, достаточность формальных правил и необходимая плотность институциональной среды соз-

дают условия для верховенства права, к основным критериям которого относятся: прозрачность, относительная стабильность, отсутствие обратной силы законов, открытость, ясность и универсальность законотворческих правил и процедур, доступность и независимость функционирования судебной системы (Гельман, 2003, с. 6). Оптимальная плотность институциональной среды создает стабильные и предсказуемые социальноэкономические условия деятельности социальных субъектов на всех уровнях общественной организации. Динамика плотности институциональной среды служит важным индикатором институциональных изменений, поэтому необходимы ее количественные оценки<sup>10</sup>.

*Исследования плотности институциональной среды и оценка параметров модели институциональных изменений проведены на основе специально созданной авторами базы данных LAWSTREAM.RU в формате Microsoft Access 2003<sup>11</sup>. Для работы с базой использован программный пакет, совместимый с Access2003. Подробно методика исследования изложена в нашей работе (Кирдина и др., 2009. С. 27–40). База данных содержит одну таблицу размером  $3654 \times 11$  ( $3654$  — количество включенных в базу законов, принятых в 1994–2009 гг., атрибутированных по 11 характеристикам), а также 38 расчетных таблиц и графиков.*

- 
10. Полученные количественные оценки плотности институциональной среды к 2009 г. представлены в: (Кирдина и др., 2009; Кирдина и др., 2010).
  11. База данных сформирована на основе синтеза информации из двух открытых источников: веб-сайта Государственной думы ФС РФ и справочной правовой системы «КонсультантПлюс». В базе представлены характеристики федеральных (федеральных конституционных) законов, принятых в России с момента создания современных органов государственной власти — Государственной думы и Совета Федерации ФС РФ — с 1994 по 2009 г. Полностью база данных LAWSTREAM.RU, включая расчетные таблицы и графики, выложена в открытом доступе в Интернете по адресу: [www.inecon.ru/ru/index.php?go=Content&id=160](http://www.inecon.ru/ru/index.php?go=Content&id=160).

## Модель институциональных изменений как объект анализа

Формируемая федеральными законами институциональная среда образует, как пишет В. Радаев в отношении институтов, «не жесткий каркас, а гибкую поддерживающую структуру, изменяющуюся под влиянием практического действия» (Радаев, 2001, с. 113). И хотя целенаправленное изменение формальных правил как составной части институциональной среды обычно в определенный момент начинает сдерживаться вектором развития институциональной среды в целом (Вольчик, 2003), очевидно, что изменение плотности институциональной среды выступает результатом взаимодействия индивидов, объединенных в группы специальных интересов<sup>12</sup>. Такие группы образуют основу модели институциональных изменений. В свою очередь, именно ее эффективность позволяет трансформировать институциональную среду в необходимом направлении — оптимизации ее плотности и качества.

Модель институциональных изменений в самом общем виде описана Нортом. В какой-то момент участники экономической или политической деятельности (или группы, интересы которых они выражают) начинают считать условия действующего «социального контракта» невыгодными и предпринимают попытки их пересмотреть. «Но поскольку, — пишет Норт, — контракты включены в иерархическую систему правил, пересмотр условий невозможен без изменения иерархически более высокого набора правил (или нарушения некоторых норм поведения). В этом случае та сторона, которая стремится усилить свои переговорные позиции, возможно, захочет затратить ресурсы на изменение правил более высокого уровня» (Норт, 1997, с. 112). Если им удастся убедить всех остальных участников в необходимости такого шага и найти компромисс, устраивающий большинство из них или наиболее влиятельные группы интересов, то

---

12. Подробнее см.: (Олсон, 1995).

правила — в нашем случае федеральные законы как вершина формальной институциональной иерархии — изменяются. Другими словами, внесение законов, их направленность, сроки рассмотрения и принятия отражают изменение в соотношении сил различных групп участников политического и экономического процессов.

В нашем исследовании модель институциональных изменений применительно к сфере федерального законодательства представлена, во-первых, ее групповой структурой, во-вторых, параметрами транзакционных издержек. Охарактеризуем их подробнее.

Группы субъектов, участвующих в процессе обсуждения и принятия решений в сфере законотворческой деятельности, весьма многочисленны, включая структуры как вне, так и внутри властных органов. Особый интерес представляют субъекты принятия решений, относящихся к самой системе высших органов власти. Только внутри Федерального Собрания в их числе можно назвать фракции, комитеты, рабочие группы и согласительные комиссии. Именно эти институциональные средства позволили Федеральному Собранию интенсивно взаимодействовать с органами исполнительной власти при обсуждении законопроектов даже в годы, когда существовала значительная политическая дистанция между исполнительной и законодательной ветвями власти (*Ремингтон, 2004, с. 28*).

Мы сконцентрировались на анализе социальных акторов, наделенных правом законодательной инициативы. К ним относятся *президент, правительство, депутаты Федерального Собрания, региональные и судебные органы государственной власти*. Именно они представляют групповую структуру модели институциональных изменений в нашем исследовании.

Важно оценить роль каждого из акторов в изменении верховного законодательства.

Транзакционные издержки в рассматриваемой субъектной модели институциональных изменений понимаются традиционно. Они представляют затраты на согласование для

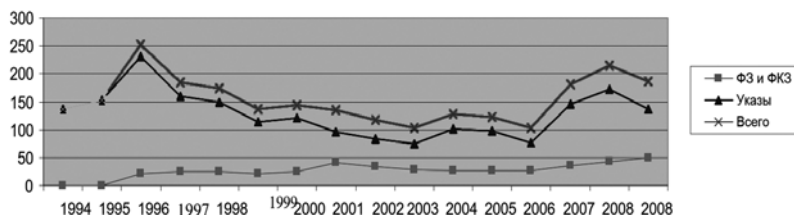
принятия того или иного федерального закона — основного продукта деятельности выделенных субъектов в законодательной сфере. Издержки измеряются *количеством дней*, затраченных с момента внесения проекта закона до его принятия.

### **Динамика модели институциональных изменений и транзакционных издержек**

Рассмотрим деятельность основных социальных акторов в исследуемой модели институциональных изменений. Начнем с законодательной активности Президента РФ. Она имеет два основных направления — внесение законопроектов в Госдуму и принятие единоличных указов.

По поводу законодательной политики, включающей как принятие законов в парламентах (в России — федеральных законов), так и указов высших органов исполнительной власти (в современной России — указов президента), в научной литературе существует две позиции. В них парламентское законотворчество противопоставляется президентским указам.

В соответствии с первой позицией при прочих равных условиях законодательный путь принятия политических решений может обеспечить большую прозрачность процесса выработки политики и стабильность политических актов, предотвратить злоупотребления со стороны исполнительной власти. Согласно другой позиции, при принятии политических решений законодательные процедуры сопровождаются более высокими распределительными издержками, чем акты исполнительной власти, так как для получения большинства голосов нужно согласовать большее количество интересов (Ремингтон, 2004, с. 28). По-видимому, именно эти особенности указов определяют повышение их роли в периоды политической нестабильности. В постперестроечной истории России такой период сохранялся вплоть до 1997 г., когда число президентских указов превышало число президентских законов и лишь с 1997 г. наметилась устойчивая противоположная тенденция (рис. 2, а также Приложение 1).



Примечание. ФЗ и ФКЗ — федеральные законы и федеральные конституционные законы, принятые по инициативе президента.

Рис. 2. Количество принятых законов, внесенных Президентом РФ, и президентских указов

Как видно на рис. 2, общее количество президентских указов с конца 1990-х годов последовательно уменьшалось — их число резко возросло лишь в 2007–2009 гг. В отношении президентских законов тенденция противоположная — их количество год от года растет.

Рост внимания президента к законодательной сфере выражается также в том, что он не только сам чаще выступает с законодательной инициативой, но и работает в более тесном контакте с депутатами Федерального Собрания. Если в 1994–1999 гг. лишь  $\frac{3}{4}$  из принятых Госдумой законов были подписаны президентом, то с 2000 г. — почти 93%<sup>13</sup>. Исследователи отмечают, что в последние годы президент и правительство концентрируют свои нормотворческие усилия не столько на принятии указов и постановлений, сколько на разработке и прохождении в парламенте важнейших законопроектов (Ремингтон, 2004, с. 34). Это выражается в постоянном росте общего числа законов, принимаемых депутатами Федерального Собрания РФ (см. Приложение 1).

Сравнительная роль основных акторов показана на рис. 3. Здесь представлены все законы, включая изменения и поправки, предложенные изучаемыми субъектами в течение исследуемого периода.

13. В отдельные годы, например в 2002 г., число законов, одобренных Советом Федерации, но по которым впоследствии не были преодолены разногласия с Президентом РФ, было выше и доходило до 13% (Актуальные проблемы государственного строительства. Вып. 2 // Аналитический вестник Совета Федерации ФС РФ. 2002. № 34).



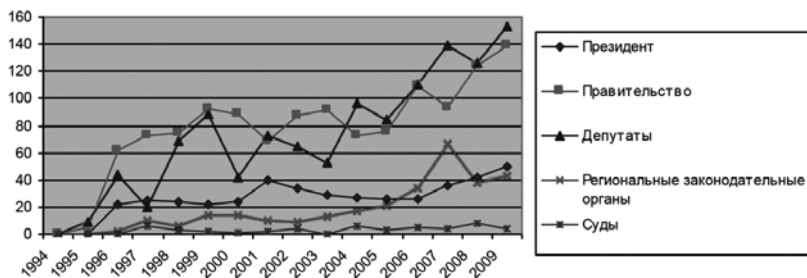


Рис. 3. Распределение принятых федеральных законов по инициаторам внесения, целые числа, 1994–2009 гг., по дате окончательного принятия закона

Из данных рис. 3 следует, что суммарно чаще других с инициативой внесения или корректировки федеральных законов выступало Правительство РФ — за 1994–2009 гг. всего 1256 раз. Почти столько же законов внесли депутаты Федерального Собрания, для которых законотворческая деятельность одна из основных — они инициировали 1171 закон. На третьем месте — Президент РФ, внесший в парламент 427 законопроектов, которые были приняты за эти годы. По инициативе региональных законодательных органов было принято 298 законов. Реже всех инициировали принятие федеральных законов суды — всего 48 законов за последние 15 лет.

Анализ показывает, что за время работы Государственной думы РФ ее депутаты стали наиболее активными в инициировании законов. Если сначала по количеству законопроектов они заметно уступали правительству, то с 2004 г. они больше остальных акторов вносят законы, которые затем принимаются. С чем это связано?

Как известно, 1 декабря 2001 г. на базе Общероссийской общественной организации «Союз «Единство и Отечество»» была создана Всероссийская партия «Единство и Отечество — Единая Россия». В 2003 г. партия на своем IV съезде приняла решение о поддержке кандидатуры В. В. Путина на

выборах Президента РФ (тогда же партия была переименована и получила свое нынешнее название «Единая Россия»). На съезде было отмечено, что «закончился период идейно-политического и организационного становления партии, и она превратилась в самую многочисленную, организованную и дееспособную политическую партию современной России»<sup>14</sup>. Кандидатура следующего Президента РФ Д.А. Медведева также была выдвинута партией «Единая Россия» на VIII съезде 17 декабря 2007 г. Оба президента, как известно, получили большинство в ходе выборов и были избраны на свои должности.

По результатам голосования на думских выборах 2003 г. «Единая Россия» завоевала 246 депутатских мандатов. Тогда впервые в российской истории, даже с учетом дореволюционных составов Думы, на основе партии-лидера было сформировано парламентское большинство<sup>15</sup>. Таким образом, в стране сложился политический союз законодательной и исполнительной ветвей власти.

Основное внимание депутаты-единороссы стали уделять разработке законов. Как результат, «в ходе четвертого созыва Государственной Думы и за весеннюю сессию пятого созыва было рассмотрено более 3000 законопроектов, принято 1226 Федеральных законов и 28 Федеральных конституционных законов. Это несоизмеримо с результатами работы 1999—2003 гг., когда было рассмотрено лишь менее 2000 законопроектов, а принято или одобрено 778»<sup>16</sup>. Как следует из высказывания председателя Госдумы Б. В. Грызлова, «мы работали над формированием законодательства новой России. Во многих случаях речь шла не о поправках, а о разработке

---

14. <http://edinros.er.ru/er/rubr.shtml?110112>.

15. <http://edinros.giport.ru>

16. <http://edinros.er.ru/er/rubr.shtml?110112>

*принципиально новых законов, о ликвидации пробелов в тех сферах, где правовая база безнадежно устарела или просто отсутствовала. Мы создавали фундамент правовой системы России XXI века»<sup>17</sup>. С 2007 г. «Единая Россия» имеет в Госдуме уже 314 мандатов, или 70% общего их числа. С этого года именно депутаты стали постоянными лидерами при внесении разнообразных законопроектов, опережая правительство.*

В последние три года возросла активность региональных субъектов. По сравнению с серединой 1990-х годов она увеличилась почти в пять раз — это самые высокие темпы роста по сравнению с другими участниками законодательного процесса.

Рост активности депутатов всех уровней в законодательной сфере наблюдается на фоне укрепления положения «Единой России» в политическом поле (см. Приложение 2). За период с 2003 г. партия все больше выступает как ведущая сила в различных областях государственного управления.

Наше исследование позволяет также сопоставить инновационную активность субъектов в модели институциональных изменений. Используя данные рис. 4, можно косвенно соотнести рутинную и инновационную функции субъектов законотворческой деятельности по доле инициированных ими новых законов. Очевидно, поправки к законам тоже носят новаторский характер, изменяя их содержание. В то же время принятие принципиально нового закона в большей мере отражает существенное изменение правил игры, поскольку в них речь идет о новых явлениях, становящихся объектами законодательного регулирования и формирующих новую будущую рутину.

На рис. 4 видно, что чаще всего с инициативой принятия новых законов выступает Президент РФ — 78% внесенных им за этот период законопроектов принципиально новые. Еще

---

17. Там же.

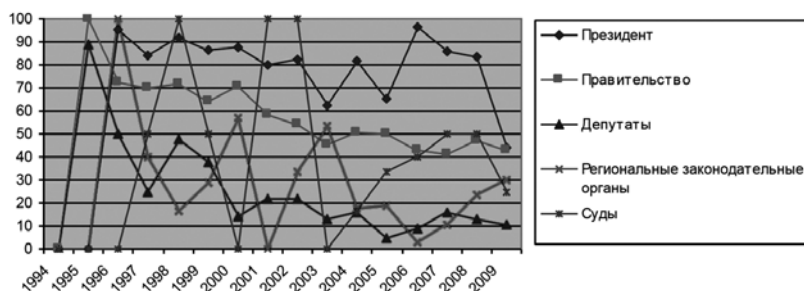


Рис. 4. Доля новых федеральных законов в общем числе принятых законов и поправок, по инициаторам внесения (в %, по дате принятия закона)

в президентских посланиях 2000–2002 гг. В.В. Путин, как отметили аналитики (*Ремингтон, 2005, с. 23*), особое внимание обращал на необходимость принятия новых законов в обеспечение фундаментальности экономических и политических реформ. Президент Д.А. Медведев поддержал эту тенденцию. Относительно высока доля новых законов среди инициатив правительства и судов – более половины (54,3% в среднем за 1995–2009 гг.).

Депутаты Государственной думы в первую очередь заняты своей основной работой по развитию и совершенствованию законодательства: в структуре их законодательных инициатив большинство касается уточнения уже действующих законов и внесения в них изменений (доля новых составляет лишь 19% всех депутатских законов в среднем за 1995–2009 гг.). Для региональных субъектов этот показатель также невысок (21,5%).

В целом можно сделать вывод о достижении некоторого порогового уровня плотности и стабилизации институциональной среды, поскольку основное внимание всех субъектов чаще направлено на совершенствование законодательства, чем на принятие новых законодательных форм. Видимо, относительно сокращается сфера социальных процессов, требующих первичного внимания законодателя. В то же время высокая доля поправок может свидетельствовать о том, что

законы принимаются недостаточно продуманно и их приходится постоянно корректировать<sup>18</sup>.

Сформированная база данных LAWSTREAM.RU позволила также оценить сроки прохождения законов по стадиям законодательного процесса и сопоставить их динамику. Зарубежные исследователи отмечают, что Россия в посткоммунистической фазе, когда «авторитарный режим был заменен президентализмом и слабой, раздробленной партийной системой», столкнулась с проблемой обеспечения эффективного сотрудничества президента и парламента (*Shugart, 1999*).

Наша база данных дает возможность выявить количественные параметры, характеризующие уровень этого взаимодействия. Он определяется при сравнении сроков прохождения через Госдуму законов, вносимых различными субъектами законотворческой деятельности. Количество дней, затраченных на принятие закона, характеризует транзакционные издержки в модели институциональных изменений. В нашем случае они представляют затраты на согласование для принятия того или иного федерального закона. В исследовании использованы два метода оценки сроков принятия законов: в зависимости от года внесения закона («длина очереди»); в зависимости от года принятия закона («скорость рассмотрения»).

На рис. 5 показан средний срок прохождения законопроекта в Госдуме — «длина очереди» — по году внесения законов: видно, сколько дней ждали своего утверждения законопроекты, внесенные в том или ином году. Так, в 1994 г. внесенные (и принятые) законы ждали принятия в среднем 661 день, в 1995 г. — 520 дней и т. д. За период наблюдений «длина очереди» сократилась до 94 дней, т. е. в семь раз за 15 лет.

---

18. Так, В. Богдановская определяет законодательные поправки как «работу над ошибками», которую депутаты вынуждены делать для улучшения качества уже принятых законов (Богдановская, 2009, с. 453).

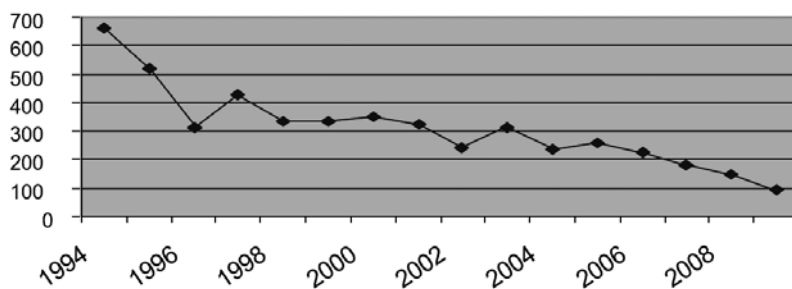


Рис. 5. «Длина очереди» принятия закона в Государственной думе, дней

Наиболее существенное снижение отмечается в отношении законов, внесенных президентом: в 2009 г. его законопроекты ждали утверждения Госдумой всего 63 дня (табл. 2). Отметим, что в 1994–1995 гг. законы, внесенные президентом (в то время им был Б.Н. Ельцин), ждали своего утверждения намного дольше других (соответственно 1866 и 696 дней).

Законопроекты правительства и депутатов Федерального Собрания в 2009 г. ждали своего утверждения в среднем 91 и 106 дней. «Длина очереди» для законов, инициированных региональными субъектами, а также судами, составляет более 4 месяцев, что гораздо выше среднего уровня.

Хотя погодовая динамика свидетельствует об общей тенденции к уменьшению «длины очереди» для всех законопроектов независимо от их инициатора, темпы ее сокращения различались. Если для президентских законопроектов они составили более 10 раз, то для законопроектов региональных субъектов немного превысили 3 раза.

Менее очевидные тенденции наблюдаются в «*скорости принятия*» законов в Госдуме. В табл. 3 представлены средние сроки прохождения закона в Государственной думе исходя из *года его принятия*. Полученная величина показывает, сколько времени в среднем уходило на рассмотрение законопроектов в Госдуме в том или ином году с момента внесения до принятия в качестве закона после трех чтений. Так, по 1994 г. нет данных, так как ни один из 21 законопроектов, внесенных на

Таблица 2. Средний срок прохождения закона от внесения в Госдуму до его принятия (по году внесения, или «длина очереди»), дней

| Год                        | В среднем за год | Президент | Правительство | Депутаты Госдумы | Региональные законодательные органы | Суды |
|----------------------------|------------------|-----------|---------------|------------------|-------------------------------------|------|
| 1994                       | 661              | 1866      | 601           | 382              | 0                                   | 0    |
| 1995                       | 520              | 696       | 487           | 443              | 656                                 | 754  |
| 1996                       | 313              | 376       | 221           | 423              | 301                                 | 381  |
| 1997                       | 429              | 303       | 461           | 462              | 379                                 | 433  |
| 1998                       | 331              | 479       | 291           | 341              | 273                                 | 229  |
| 1999                       | 331              | 302       | 301           | 344              | 465                                 | 473  |
| 2000                       | 350              | 250       | 218           | 402              | 734                                 | 517  |
| 2001                       | 304              | 155       | 251           | 404              | 522                                 | 310  |
| 2002                       | 239              | 148       | 205           | 284              | 488                                 | 1107 |
| 2003                       | 300              | 116       | 256           | 368              | 516                                 | 501  |
| 2004                       | 220              | 121       | 144           | 220              | 486                                 | 166  |
| 2005                       | 248              | 72        | 207           | 278              | 437                                 | 237  |
| 2006                       | 206              | 113       | 167           | 231              | 261                                 | 403  |
| 2007                       | 151              | 90        | 123           | 162              | 212                                 | 280  |
| 2008                       | 87               | 62        | 84            | 84               | 173                                 | 156  |
| 2009                       | 94               | 63        | 91            | 106              | 134                                 | 142  |
| <i>В среднем за период</i> | 262              | 203       | 231           | 285              | 365                                 | 372  |

рассмотрение в только что образованную Думу, не был в том же году принят. В 1995 г. средний срок прохождения законов (внесенных как в прошлом, так и в этом году) составил 257 дней, в 1996 г. — 160 дней и т. д.

Можно видеть, что средние сроки рассмотрения законов то увеличивались, то уменьшались. Периодически происходило своеобразное «затоваривание» — тогда срок рассмотрения законопроектов удлинялся. Такая «аритмия» характерна для периода 1995–2002 гг., когда средние сроки менялись от 160 до 405 дней. Но начиная с 2003 г. сроки прохождения законов стабильно сокращались, что свидетельствует о повышении ритмичности в работе Госдумы и большем единстве мнений среди депутатов.

Таблица 3. Средний срок прохождения закона от внесения в Госдуму до его принятия (по году принятия, или «скорость принятия»), дней

| Год                 | В среднем за год | Президент | Правительство | Депутаты Госдумы | Региональные законодательные органы | Суды |
|---------------------|------------------|-----------|---------------|------------------|-------------------------------------|------|
| 1994                | 0                | 0         | 0             | 0                | 0                                   | 0    |
| 1995                | 257              | 0         | 227           | 273              | 0                                   | 0    |
| 1996                | 160              | 148       | 159           | 155              | 312                                 | 0    |
| 1997                | 242              | 181       | 205           | 344              | 236                                 | 389  |
| 1998                | 283              | 231       | 249           | 323              | 433                                 | 189  |
| 1999                | 279              | 237       | 220           | 371              | 212                                 | 323  |
| 2000                | 331              | 300       | 312           | 305              | 534                                 | 473  |
| 2001                | 405              | 509       | 344           | 382              | 544                                 | 362  |
| 2002                | 300              | 245       | 214           | 396              | 461                                 | 792  |
| 2003                | 305              | 217       | 284           | 325              | 540                                 | 0    |
| 2004                | 306              | 210       | 295           | 321              | 441                                 | 249  |
| 2005                | 289              | 176       | 372           | 220              | 355                                 | 646  |
| 2006                | 241              | 55        | 186           | 230              | 566                                 | 321  |
| 2007                | 210              | 125       | 172           | 227              | 275                                 | 195  |
| 2008                | 218              | 101       | 154           | 292              | 274                                 | 388  |
| 2009                | 209              | 83        | 191           | 238              | 307                                 | 236  |
| В среднем за период | 262              | 203       | 231           | 286              | 365                                 | 372  |

Отмеченные выше тенденции справедливы и в отношении инициаторов внесения законов: «скорость принятия» законопроектов президента самая высокая — 83 дня в 2009 г. Для правительственных законов она составила 191 день. Все остальные законы проходили медленнее — 307 дней для законов региональных субъектов, 236 и 238 дней для законов, внесенных соответственно судебными органами и депутатами Госдумы. Дольше других рассматривались законы, внесенные региональными законодательными органами, — 307 дней. Это означает, что к 2009 г. их скопилось довольно много за предыдущие годы: то ли по причине недостаточного уровня разработки, то ли из-за более слабого регионального лобби-



Таблица 4. Федеральные законы о бюджете

| Бюджетный год | Подписан           | Количество статей | Количество страниц/Кб |
|---------------|--------------------|-------------------|-----------------------|
| 1992          | 17 июля 1992 г.    | 18                | 8                     |
| 1993          | 14 мая 1993 г.     | 27                | 19                    |
| 1994          | 1 июля 1994 г.     | 39                | 28                    |
| 1995          | 31 марта 1995 г.   | 62                | 67                    |
| 1996          | 31 декабря 1995 г. | 71                | 33                    |
| 1997          | 26 февраля 1997 г. | 99                | 119                   |
| 1998          | 26 марта 1998 г.   | 120               | 115                   |
| 1999          | 22 февраля 1999 г. | 141               | 59                    |
| 2000          | 31 декабря 1999 г. | 163               | 243                   |
| 2001          | 27 декабря 2000 г. | 139               | 340                   |
| 2002          | 30 декабря 2001 г. | 147               | 423/1829              |
| 2003          | 24 декабря 2002 г. | 146               | 1199/X                |
| 2004          | 23 декабря 2003 г. | 160               | 1281/X                |
| 2005          | 23 декабря 2004 г. | 130               | 1408/X                |
| 2006          | 26 декабря 2005 г. | 130               | 1692/X                |
| 2007          | 19 декабря 2006 г. | 139               | 2019/X                |
| 2008*         | 24 декабря 2007 г. | 31                | 5129/X                |
| 2009*         | 24 ноября 2008 г.  | 25                | /2907                 |
| 2010*         | 2 декабря 2009 г.  | 24                | /2962                 |

\* В 2007 г. были пересмотрены процедура формирования и структура федерального бюджета. При сокращении числа статей увеличилось число приложений. Кроме того, бюджет принимается на предстоящий год и на плановый период на следующие два года (вэб-сайт «Бюджетная система Российской Федерации» [www.budgetrf.ru/index.htm](http://www.budgetrf.ru/index.htm)).

рования по сравнению с центральными структурами. Кроме того, такие различия сроков прохождения законов, инициированных разными субъектами, позволяют косвенно судить о качестве вносимых законопроектов: чем дольше они рассматриваются, тем менее подготовлены с точки зрения учета расстановки политических сил.

Полученные данные свидетельствуют о том, что сроки принятия законов различаются и в зависимости от сферы регулирования. Наиболее выражена тенденция к их сокраще-

нию в сфере «Экономика и финансы». Они и принимаются быстрее — в среднем за 68 дней, и по сравнению с 1994–1995 гг. сроки рассмотрения уменьшились почти в восемь раз. Для сравнения: по кодексам они сократились в три раза, по прочим и политическим законам — примерно в четыре раза (Кирдина и др., 2010).

Рост эффективности законодателя в сфере экономики (если судить по параметру транзакционных издержек) подтверждают дополнительные данные о принятии российского бюджета (см. табл. 4).

Как следует из данных табл. 4, постоянно возрастает объем принимаемых бюджетов. Они содержат все больше страниц и килобайтов информации. Это косвенно свидетельствует о росте сферы бюджетного регулирования в современной России. Кроме того, их принимают заблаговременно, в отличие от ситуации до 1999 г. (тогда их принимали, как правило, в наступившем бюджетном году).

\* \* \*

В процессе исследования выявлены следующие изменения в законодательной институциональной сфере российского общества в 1994–2009 гг.:

- плотность институциональной среды постоянно увеличивается, поскольку количество принимаемых законов с каждым годом растет, тем самым все больше норм и правил становятся формализованными и приобретают легитимный характер;
- вектор институциональных изменений демонстрирует возросшую стабильность институциональной среды, что выражается в снижении доли новых законов по сравнению с принятием поправок и дополнений в уже действующее законодательство;
- институциональные изменения в разных сферах иницируются различными субъектами, обладающими правом законодательной инициативы. Так, экономические законы вносятся в основном правительством

и депутатами Госдумы (на их долю приходится почти 90% соответствующих законов), а  $\frac{3}{4}$  политических предлагаются депутатами федерального и региональных собраний;

- за 15 лет роль анализируемых субъектов в модели институциональных изменений изменилась: если в середине 1990-х годов основным инициатором вносимых законопроектов выступало правительство, то с 2004 г. — депутаты. По сравнению с началом периода возросла также роль региональных законодательных органов;
- постоянно повышается роль президента как субъекта институциональных изменений в законодательном поле. Об этом свидетельствуют: перенос «центра тяжести» его нормотворческой деятельности с президентских указов на федеральные законы; концентрация на решениях, требующих первичного внимания законодателя, т. е. на новых законах, а не поправках в действующее законодательство; более быстрое утверждение в настоящее время законопроектов, вносимых Президентом РФ в Госдуму;
- в целом наблюдается положительная динамика институциональных транзакционных издержек в законодательном процессе, выражаемая показателем среднего срока прохождения и принятия закона;
- с 2003 г. постепенно растет «скорость принятия» законов в высших органах законодательной власти, повышается ритмичность их работы.

Полученные в процессе исследования данные количественно подтверждают гипотезу, согласно которой, во-первых, достигается консенсус между основными экономическими и политическими игроками; во-вторых, снижаются транзакционные издержки согласования решений на высшем уровне иерархии законодательной институциональной среды. Данные также показывают, что в силу очевидного укрепления политических институтов X-матрицы, исторически домини-

рующих в общественной структуре России<sup>19</sup>, формируется более стабильная и менее конфликтная институциональная среда.

## Приложение 1

Принятие основных видов правовых документов в Российской Федерации, 1994–2009 гг.

| Год                        | Федеральные<br>(федеральные<br>конституционные)<br>законы | Указы | Акты  | Решения<br>и постановления<br>министерств<br>и ведомств | Всего<br>за год |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------|-------|-------|---------------------------------------------------------|-----------------|
| 1994                       | 92                                                        | 136   | 678   | 286                                                     | 1192            |
| 1995                       | 253                                                       | 152   | 652   | 340                                                     | 1397            |
| 1996                       | 191                                                       | 230   | 648   | 388                                                     | 1457            |
| 1997                       | 187                                                       | 159   | 730   | 525                                                     | 1601            |
| 1998                       | 226                                                       | 150   | 986   | 620                                                     | 1982            |
| 1999                       | 271                                                       | 114   | 953   | 783                                                     | 2121            |
| 2000                       | 182                                                       | 120   | 947   | 894                                                     | 2143            |
| 2001                       | 222                                                       | 95    | 909   | 1055                                                    | 2281            |
| 2002                       | 226                                                       | 83    | 1137  | 1153                                                    | 2599            |
| 2003                       | 191                                                       | 74    | 1178  | 1364                                                    | 2807            |
| 2004                       | 226                                                       | 101   | 830   | 1083                                                    | 2240            |
| 2005                       | 236                                                       | 97    | 866   | 1586                                                    | 2785            |
| 2006                       | 295                                                       | 77    | 922   | 2065                                                    | 3359            |
| 2007                       | 341                                                       | 145   | 1115  | 2682                                                    | 4283            |
| 2008                       | 332                                                       | 173   | 1072  | 2430                                                    | 4007            |
| 2009                       | 403                                                       | 137   | 963   | 4495                                                    | 5998            |
| <i>Итого<br/>за период</i> | 3874                                                      | 2043  | 14586 | 21749                                                   | 42252           |

19. К ним, в частности, относятся институт иерархической вертикали власти во главе с Центром, институт назначений, институт общего собрания и единогласия (в противоположность институту многопартийности и демократического большинства, характерному для Y-матрицы). Подробнее см.: Кирдина С. Г. Институциональные матрицы и развитие России. Изд-е 2-е. Новосибирск: ИЭиОПП СО РАН, 2001. С. 123–159.

## Приложение 2

**Основные показатели развития Всероссийской политической партии  
«Единая Россия», ноябрь 2004 — ноябрь 2008 гг.**

| Показатель                                                                                                                                   | 2004                | 2008                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------|
| Результат участия партии в выборах депутатов Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации:                                | 37,57%<br>(2003 г.) | 64,30%<br>(2007 г.) |
| Численность фракции «Единая Россия» в Государственной Думе Федерального Собрания Российской Федерации                                        | 304                 | 315                 |
| Члены Совета Федерации Федерального Собрания Российской Федерации — члены партии                                                             | 45                  | 117                 |
| Количество депутатских объединений партии в законодательных (представительных) органах государственной власти субъектов Российской Федерации | 72 (81%)            | 83 (100%)           |
| В том числе:                                                                                                                                 |                     |                     |
| количество депутатских объединений партии, где их численность составляет квалифицированное большинство                                       | 14                  | 43                  |
| количество депутатских объединений партии, где их численность составляет более ½, но менее ⅔                                                 | 25                  | 36                  |
| количество депутатских объединений партии, где их численность составляет менее ½, но более ⅓                                                 | 21                  | 4                   |
| количество депутатских объединений партии, где их численность составляет менее ⅓                                                             | 12                  | 0                   |
| Общее количество депутатов фракций «Единая Россия» в региональных законодательных (представительных) органах государственной власти          | 1710                | 2750                |
| Главы субъектов Российской Федерации — члены партии                                                                                          | 36                  | 74                  |
| Руководители региональных законодательных (представительных) органов государственной власти — члены партии                                   | 18                  | 79                  |
| Всего депутатов — членов партии, в представительных органах местного самоуправления (в %)                                                    | 13,8                | 40,53               |
| Главы органов местного самоуправления — члены партии (в %)                                                                                   | 22,6                | 63,35               |
| Результат участия партии в выборах региональных законодательных (представительных) органов государственной власти (среднее в %)              | 34,08               | 66,5                |
| Численность партии (человек)                                                                                                                 | 851 321             | 1 913 770           |
| Количество структурных подразделений партии:                                                                                                 |                     |                     |
| региональных отделений                                                                                                                       | 89                  | 83                  |
| местных отделений                                                                                                                            | 2593                | 2598                |
| первичных отделений                                                                                                                          | 27 324              | 69 384              |
| Рейтинг «Единой России» (среднее за год, в % от общего числа избирателей)                                                                    | 27                  | 55                  |

Источник: <http://edinros.er.ru/er/rubr.shtml110112>

## ЛИТЕРАТУРА

1. Богдановская В.А. (2009). Проблемы совершенствования законодательства и правоприменительной практики в России. В Материалы Международной научно-практической конференции, 19–21 января 2009 г. НПК «РОСТ».
2. Василенко Н.В. (2008). Институциональная среда организаций: характеристики и уровни регулирования // Проблемы современной экономики, 27(3), 45–52.
3. Вольчик В.В. (2003). Институционализм: вторичность нового мифа? (возможности и пределы институциональной экономики) // Экономический вестник Ростовского государственного университета, 1(1), 125–134.
4. Вопленко Н.Н., & Рожнов А.П. (2004). Правоприменительная практика: понятие, основные черты и функции. Изд-во ВолГУ.
5. Гельман В.Я. (2003). Институциональное строительство и неформальные институты в современной российской политике. Политические исследования, (4), 6–24. DOI: 10.17976/jpps/2003.04.02
6. Курдина С.Г., Рубинштейн А.Я., Толмачева И.В. (2009). База данных LAWSTREAM.RU: количественные оценки институциональных изменений. М.: ИЭ РАН.
7. Курдина С.Г., Рубинштейн А.Я., Толмачева И.В. (2010). Некоторые количественные оценки институциональных изменений: опыт исследования российского законодательства. Terra Economicus, 8(3), 8–22.
8. Клейнер Г.Б. (2004). Эволюция институциональных систем. Наука.
9. Либман А.М. (2007). Экономическая теория и социальные науки об экономике: некоторые направления развития (Научный доклад). ИЭ РАН.
10. Норт Д. (1997). Институты, институциональные изменения и функционирование экономики (А.Н. Нестеренко, Пер.; Б.З. Мильнер, Науч. ред.; с. 108). Фонд экономической книги «Начала».
11. Олсон М. (1995). Логика коллективных действий. Общественные блага и теория групп. Фонд экономической инициативы.
12. Павлов П.Н. (2010). Характеристика нормотворческой деятельности федеральных органов исполнительной власти в России в 1996–2001 гг. М.: ИЭ РАН.
13. Радаев В.В. (2001). Новый институциональный подход: построение исследовательской схемы // Журнал социологии и социальной антропологии, 4(3).
14. Развитие российского финансового рынка и новые инструменты привлечения инвестиций (2007). Под ред. Энтова Р. М., Радыгин А.Д., Мау В.А., и др. Институт экономики переходного периода.

15. Ремингтон Т. (2004). Демократизация, разделение властей и объем государственных полномочий в России. Сравнительное конституционное обозрение, 49(4), 28.
16. Ремингтон Т.Ф. (2005). Поддержка Президента в российской Государственной Думе. Сравнительное конституционное обозрение, (3(52)), 18–32.
17. Рожнов А.П. (1999). Конкретизация правовых норм как содержание юридической практики. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 5: Политика. Социология. Право, (2).
18. Тамбовцев В.А. (1997). Теоретические вопросы институционального проектирования // Вопросы экономики, (3), 86–97.
19. Фролов Д.П. (2008). Эволюционная перспектива институциональной экономики России. Изд-во ВолГУ.
20. North D.C. (1993). Five propositions about institutional change (Economic History No. 9309001). EconWPA.
21. Shugart M.S. (1999). Presidentialism, parliamentarism, and the provision of collective goods in less-developed countries. Constitutional Political Economy, 10(1), 53–88.

## 2.2. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРИИ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ МЕТОДАМИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

*Кириллюк И.А., Волынский А.И., Круглова М.С.,  
Кузнецова А.В., Рубинштейн А.А., Сенько О.В.*

Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7.  
№ 4. С. 923–939.

Цель настоящего исследования состояла в установлении достоверной взаимосвязи показателей внешней среды и уровня освоенности территорий с характером доминирующих в странах институциональных матриц. Среди индикаторов внешних условий представлены как исходные статистические показатели, напрямую полученные из баз данных открытого доступа, так и сложные интегральные показатели, сформированные путем применения метода главных компонент. Оценка точности распознавания стран с доминированием X- или Y-институциональных матриц по перечисленным показателям проводилась с помощью ряда методов, основанных на машинном обучении. Была выявлена высокая информативность таких показателей, как освоенность территории, амплитуда осадков, летние и зимние температуры, уровень рисков.

**Ключевые слова:** теория институциональных матриц, машинное обучение.

Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ (проект № 14-02-00422).

### EMPIRICAL TESTING OF INSTITUTIONAL MATRICES THEORY BY DATA MINING

The paper has a goal to identify a set of parameters of the environment and infrastructure with the most significant impact on institutional-matrices that dominate in different countries. Parameters of environmental conditions includes raw statistical indices, which



were directly derived from the databases of open access, as well as complex integral indicators that were by method of principal components. Efficiency of discussed parameters in task of dominant institutional matrices type recognition (X or Y type) was evaluated by a number of methods based on machine learning. It was revealed that greatest informational content is associated with parameters characterizing risk of natural disasters, level of urbanization and the development of transport infrastructure, the monthly averages and seasonal variations of temperature and precipitation.

**Keywords:** institutional matrices theory, machine learning.

## 1. Введение

Разработанная С.Г. Кирдиной теория институциональных матриц утверждает, что характер развития общества определяется доминированием в его структуре одной из двух систем базовых институтов, или институциональной матрицы — либо X, либо Y (*Кирдина, 2014*). X-матрица характеризуется институтами редистрибутивной экономики, унитарным политическим устройством, коммунитарной идеологией. Y-матрица характеризуется институтами рыночной экономики, федеративным политическим устройством, индивидуалистской идеологией. На рис. 1 представлены теоретически предполагаемые страны X- и Y-матриц (серый и темно-серый цвет соответственно).

Несмотря на то, что положения этой теории активно используются в сравнительных исследованиях разных стран, а также при анализе особенностей социально-экономического развития России, эмпирической проверке собственно теории институциональных матриц уделяется несопоставимо меньшее внимание. Среди немногочисленных работ можно отметить исследование Н.В. Латовой (*Латова, 2003*), где автор проверяет выводы теории институциональных матриц с помощью этнометрической методологии Г. Хофстеде. В результате Латова подтверждает, что отнесенность стран к группе государств с доминированием той или иной институциональной матрицы

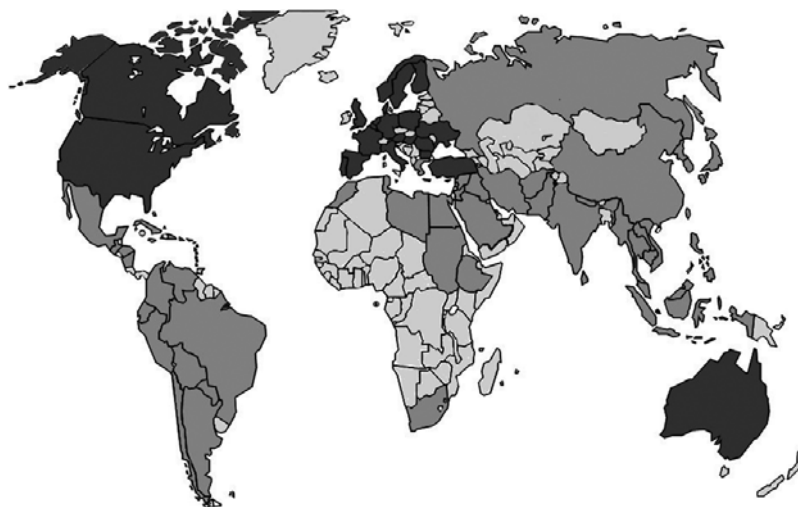


Рис. 1. Страны X-матрицы представлены серым цветом, страны Y-матрицы — темно-серым цветом. Светло-серым закрашены страны, не вошедшие в исследование

совпадает с группировкой Хофстеде, в которой используются следующие культурные показатели: дистанция власти, индивидуализм, маскулинность (Hofstede, 1993).

Одной из задач проекта «Анализ макроинституциональной циклической динамики», реализуемого под руководством С. Г. Кирдиной (подробнее см. (Кирдина, 2015)), была эмпирическая проверка основополагающей гипотезы теории институциональных матриц о взаимосвязи внешних условий, в которых развивается государство, с характером доминирующей в нем матрицы. Среди показателей внешних условий основное внимание было уделено климатическим характеристикам. Также использовались показатели освоенности территории, природных рисков и др.

Методы многомерного статистического анализа (в том числе факторного, кластерного и дискриминантного анализа) применялись ранее для исследований социально-экономических систем стран мира другими исследователями, см., например, (Жуковская, Мучник, 1976). Группа ученых

из МГИМО(У) МИД РФ провела и опубликовала ряд исследований по этой теме в рамках проекта «Политический атлас современности» (Мельвилъ, 2006). Особенность наших исследований в том, что мы применяем несколько иные современные подходы, подтвердившие свою эффективность и устойчивость на большом числе задач и различных областей знаний, для обоснования конкретной теории институциональных матриц. Использование метода оптимальных достоверных разбиений (ОДР) позволило не только наглядно выделить на диаграммах рассеяния области преобладания какого-либо из типов институциональных матриц, но также оценить достоверность различий между этими областями. Следует отметить, что метод ОДР основан на перестановочном тесте, не требующем предположений о типах распределений и не чувствительном к размерам выборок (Kuznetsova et al., 2014), что является актуальным для рассматриваемой задачи ввиду ограниченного числа сравниваемых эталонных стран. Наглядное выделение областей преобладания типов матриц в пространстве показателей облегчает анализ возможных причинно-следственных связей. Использование различных технологий распознавания позволило не только повысить точность прогноза, но также дать более подробную, основанную на различных критериях оценку сходства каждой из стран с эталонными группами, построить более устойчивое коллективное решение. Отметим, что повышение устойчивости является особенно важным в условиях малых выборок (Журавлев et al., 2006).

## 2. Материалы и методы

### 2.1. Анализируемая информация

На первом этапе была сформирована выборка стран в количестве 70.

В выборку страны включались по следующим критериям. Они должны иметь достаточно продолжительную историю независимого существования и быть политически самостоя-

тельными. Также критериями являются большие число жителей и размер территории.

Сначала был взят список из 50 стран, которые подписали устав ООН в 1945 г. Из этого списка затем были исключены страны, которые потом распались на другие государства (Россия как преемница СССР была в базе оставлена), страны с населением менее 5 млн человек (Коста-Рика, Либерия, Люксембург, Уругвай), страны с площадью территории менее 30 тыс. кв. км (Сальвадор), а также Республика Гаити (из-за ее нестабильности). Затем в выборку были добавлены страны с населением более 5 млн человек, территорией не менее 30 тыс. кв. км и имеющие период независимости не менее 55 лет. Итоговый выборочный список включает 70 стран<sup>1</sup>:

■ **X-матрица:** Афганистан, Аргентина, **Белоруссия**, Болгария, Боливия, **Бразилия\***, Венгрия, **Венесуэла**, Вьетнам, Гватемала, Гондурас, Греция, Доминиканская Республика, **Египет**, Индия, Индонезия, Иордания, Ирак, Иран, Камбоджа, **КНДР**, **КНР**, Колумбия, **Куба**, **Лаос**, Ливан, Ливия, Малайзия, Марокко, **Мексика**, **Мьянма**, **Непал**, Никарагуа, Пакистан, Парагвай, **Перу**, Польша, Португалия, **Республика Корея**, **Российская Федерация**, Румыния, **Саудовская Аравия**, Сирия, Судан, Таиланд, Тунис, Турция, Украина, **Филиппины**, Чили, Шри-Ланка, Эквадор, Эфиопия, **Южно-Африканская Республика**, Япония;

■ **Y-матрица:** Австралия, Австрия, Бельгия, Великобритания, Дания, Германия, Испания, Италия, Канада, Нидерланды, Норвегия, США, Финляндия, Франция, Швеция.

Предварительно имеющаяся информация свидетельствует о том, что стран, в которых доминируют X-институты, примерно в два раза больше, т. е.  $\frac{2}{3}$  выборки.

1. Жирным шрифтом выделены страны, вошедшие в эталонную выборку (31 страна: 18 – X-стран, 13 – Y) – для создания решающего правила при машинном обучении.

Далее была сформирована база данных показателей внешних условий.

Предварительный список индикаторов, на основе которых можно судить о коммунальности/некоммунальности материально-технологической среды, включает в себя следующие группы:

- 1) *уровень хозяйственных рисков;*
- 2) *заселенность территории;*
- 3) *транспортная инфраструктура;*
- 4) *обеспеченность минеральными ресурсами;*
- 5) *прочие характеристики.*

Статистические данные взяты на последнюю доступную дату для каждой страны, включенной в выборку.

Более 50 показателей взято из базы данных сайта [www.worldbank.org](http://www.worldbank.org).

Это данные о природных катаклизмах и ущербе от них, о числе погибших от катаклизмов, данные о температуре и осадках, водных ресурсах, урожайности зерновых и территории, засеянной зерновыми, грузообороте водного транспорта, населении городов, сельскохозяйственных и пахотных угодьях, о площади лесов.

С сайта [www.cia.gov](http://www.cia.gov) (база данных The World Factbook) взяты данные о населении, территории, годе обретения независимости, береговой линии, водных путях, обычных и железных дорогах, трубопроводах, запасах нефти и природного газа.

Также некоторые показатели взяты из источников [www.gapminder.org](http://www.gapminder.org), <http://faostat3.fao.org>, <http://www.indexmundi.com>, <http://en.wikipedia.org>, <http://unstats.un.org>, некоторые данные о запасах природных ресурсов взяты из <http://www.world-nuclear.org>, <http://www.bp.com>, <http://minerals.usgs.gov>.

Часть показателей была также получена из исходных посредством арифметических преобразований, таких, например, как деление на площадь, или количество населения страны, или ВВП. Всего в расчетах участвовало 116 исходных

и 15 показателей, полученных с помощью метода главных компонент. Все эти показатели прошли предварительный отбор на информативность методом оптимальных достоверных разбиений (ОДР) по индикатору двух групп эталонных стран. В конечную базу вошли только наиболее информативные показатели (табл. 1).

Таблица 1. Краткое и полное наименование показателей, по которым проводился анализ, метод расчета и источники данных

| Кратко               | Наименование показателя                              | Метод расчета, год сбора данных, способ получения показателя                                                                                                                                             |
|----------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Max_t_град_Цельсия   | Максимальная температура за год, градусов Цельсия    | Максимальная среднемесячная (из средних значений за 1961–1999 гг.) температура, градусов Цельсия                                                                                                         |
| Min_t_град_Цельсия   | Минимальная температура за год, градусов Цельсия     | Минимальная среднемесячная (из средних значений за 1961–1999 гг.) температура, градусов Цельсия                                                                                                          |
| Амплитуда_осадков    | Среднегодовая амплитуда осадков, мм                  | Разница между максимальным и минимальным (за 12 месяцев) среднемесячными значениями выпавших осадков, мм, по значениям за 1961–1999 гг.                                                                  |
| Амплитуда_температур | Среднегодовая амплитуда температур, градусов Цельсия | Разница между максимальной и минимальной (из средних значений за 1961–1999 гг.) среднемесячными температурами, градусов Цельсия                                                                          |
| Зимние_осадки        | Уровень осадков в холодные месяцы                    | Интегральный по 6 исходным показателям (среднемесячных значений осадков с ноября по март, мм, по значениям за 1961–1999 гг.), полученный на основе метода главных компонент                              |
| Зимние_температуры   | Температура в холодные месяцы                        | Интегральный по 7 исходным показателям (среднемесячных температур с октября по апрель 1961–1999 гг., а также средней по данным 12 месяцев температуры за год, градусов Цельсия), метод главных компонент |
| Городское_население  | Концентрация городского населения                    | Интегральный по 3 исходным показателям (доля населения крупнейшего города, %; доля населения столицы, %; доля населения в городах свыше 1 млн чел., %, 2012 г.), метод главных компонент                 |
| Летние_осадки        | Уровень осадков в теплые месяцы                      | Интегральный по 7 исходным показателям (среднемесячных значений осадков с мая по октябрь, а также значения осадков за год, мм, по значениям за 1961–1999 гг.), метод главных компонент                   |

| Кратко               | Наименование показателя                     | Метод расчета, год сбора данных, способ получения показателя                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Летние_температуры   | Температуры в теплые месяцы                 | Интегральный по 5 исходным показателям (среднемесячных температур с мая по сентябрь 1961–1999 гг., градусов Цельсия), метод главных компонент                                                                                                                              |
| Ресурсы_нефти_и_газа | Запасы углеводородов                        | Интегральный по 2 исходным показателям за 2013 г. (запасы нефти, млн баррелей в расчете на 1000 кв. км территории; запасы газа, миллиард кубометров в расчете на 1000 кв. км территории), метод главных компонент.                                                         |
| Ресурсы_леса_и_воды  | Обеспеченность водными и лесными ресурсами  | Интегральный по 3 исходным показателям (доля территории, занятой лесами, %, 2011 г.; запасы пресной воды в кубометрах в расчете на 1000 кв. км; значение осадков за год, мм, 2011 г.), метод главных компонент                                                             |
| С/х_освоен-ность     | Сельскохозяйственная освоенность территории | Интегральный по 3 исходным показателям (доля сельхозугодий, %, 2009–2011 гг.; доля пашни, %, 2011 г.; доля территории под зерновыми культурами, %, 2010–2012 гг.), метод главных компонент                                                                                 |
| Урбан+ транспорт     | Освоенность территории                      | Интегральный по 3 исходным показателям (плотность автомобильных дорог, км на 1000 кв. км; плотность железных дорог, км на 1000 кв. км; доля городского населения, %, 2012), метод главных компонент. Данные о дорогах варьируют для разных стран в диапазоне 2000–2012 гг. |
| Уровень_рисков       | Уровень природных рисков                    | Интегральный по 3 исходным показателям за 1970–2008 гг., человек/100 000 человек (доля населения, подверженного стихийным бедствиям; доля пострадавших от засухи; доля пострадавших от наводнений), метод главных компонент                                                |
| Зерновые_культуры    | Урожайность зерновых культур                | Показатель взят непосредственно из базы данных, размерность кг с гектара, 2012 г.                                                                                                                                                                                          |

Большинство показателей табл. 1 получено на основе базы данных Всемирного банка. Исключения: «Ресурсы\_нефти\_и\_газа» рассчитаны на основе базы данных ЦРУ The World Factbook (<https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/>), там же взяты плотности автомобильных и железных дорог для показателя «Урбан + транс-

порт». «Уровень\_рисков» рассчитан на основе базы данных Gapminder.org.

В первом столбце табл. 1 приведены названия показателей, используемые в тексте, в среднем столбце — их полное название, а в правом столбце — история создания показателя и источник информации по нему со ссылкой.

Исследования связи типа доминирующей институциональной матрицы с перечисленными выше индикаторами проводились на выборке из 31 страны, для которых доминирующий тип известен. Данная выборка (эталонная) далее будет называться также обучающей выборкой. Она будет использоваться для поиска закономерностей и настройки алгоритмов распознавания. В обучающую выборку включено 13 стран с Y-институциональными матрицами и 18 стран с X-институциональными матрицами (далее — X- и Y-страны).

## 2.2. Методы анализа

Исследования проводились с использованием методов интеллектуального анализа данных, включающих метод главных компонент, метод оптимальных достоверных разбиений, а также набор методов распознавания.

**Метод главных компонент.** Причина использования метода главных компонент в необходимости сокращения весьма обширного исходного набора показателей. Для групп однородных по своему смыслу показателей методом факторного анализа (метод выделения: анализ главных компонент; метод вращения: варимакс с нормализацией Кайзера) вычислялись соответствующие главные компоненты (с полной объясненной дисперсией более 90 процентов), что позволило перейти от анализа исходных таблиц, содержащих значения 116 индикаторов, к набору 11 интегральных показателей.

**Метод оптимальных достоверных разбиений (ОДР).** Метод ОДР использовался для изучения связи типа институциональной матрицы с отдельными индикаторами или парами индикаторов. Метод ОДР основан на оптимальном



разбиении интервалов значений независимых (объясняющих) переменных или совместных областей значений пар переменных (*Senko, Kuznetsova, 2006*). Ищутся параллельные координатным осям границы, позволяющие наилучшим образом отделить объекты с различными уровнями значений прогнозируемой переменной. При этом разделяющая способность разбиения оценивается с помощью статистики критерия  $\chi^2$ . Верификация закономерностей производится с помощью перестановочных тестов, позволяющих в случае двумерных моделей оценить значимость различий по каждой из двух используемых переменных (*Kuznetsova et al., 2014*). Перестановочный тест основан на многократном повторении вычислений оптимальных разбиений на большом числе случайных таблиц, полученных из исходной таблицы с помощью случайных перестановок позиций индикаторов класса относительно фиксированных позиций объясняющих переменных.

Одним из преимуществ подхода является возможность выявления нелинейных эффектов. Преимуществом также является удобная наглядная форма представления результатов анализа в виде двумерных диаграмм.

**Методы распознавания.** Методы распознавания использовались для многофакторного оценивания типа институциональных матриц. Алгоритм распознавания классифицирует произвольную страну в группу X или группу Y по большому набору индикаторов. На первом этапе индикаторы используются для вычисления оценок за группы. Оценкой объекта за группу (класс) в теории распознавания называется число, являющееся мерой сродства объекта к этой группе. Чем больше величина оценки объекта за какую-либо группу, тем увереннее этот объект может быть отнесен к ней. Таким образом, алгоритмы распознавания позволяют численно выразить меру сходства страны с группой X или с группой Y, ранжировать страны по отношению к группам. Окончательная классификация производится по величине оценок, рассчитанных на первом этапе. Например, объект

может быть отнесен в группу, оценка за которую максимальна. Но могут быть объекты, занимающие промежуточное среднее положение между полюсами.

Важной характеристикой связи типа институциональных матриц с произвольным набором индикаторов является точность производимой по ним классификации, которая может быть эффективно оценена с помощью техники скользящего контроля. Эта техника дает объективную несмещенную оценку точности распознавания и заключается в последовательном удалении одного объекта из выборки, создания решающего правила по оставшимся объектам и классификации данного удаленного объекта. Так происходит со всеми объектами выборки. Доля правильно распознанных объектов в этой процедуре (отнесенных в свой класс) является оценкой точности распознавания.

При анализе сравниваемых классов были использованы методы, вошедшие в компьютерную систему «Распознавание» (Журавлев, Рязанов, Сенько, 2006). Подробная информация о системе «Распознавание» доступна на сайте [www.solutions-center.ru](http://www.solutions-center.ru). Прогностическая способность использованных методов оценивалась с помощью метода скользящего контроля. Под прогностической способностью в данном случае понималось правильное отнесение страны к группе, в которую ее до этого поместил эксперт.

Распознавание проводили следующими методами, входящими в систему «Распознавание».

**Линейный дискриминант Фишера.** Классический статистический метод, основанный на поиске направления в многомерном пространстве признаков, вдоль которого достигается наилучшая разделяемость распознаваемых классов.

**Линейная машина.** Построение линейного решающего правила, задаваемого с помощью линейных функций, которые строятся для каждого из классов. Вычисление коэффициентов линейной функции осуществляется через поиск максимальной совместной подсистемы неравенств, что соот-

ветствует максимизации числа правильно распознанных объектов (Журавлев, Рязанов, Сенько, 2006).

**Многослойный перцептрон (нейронная сеть).** Многослойная нейронная сеть, которая обучается с помощью метода обратного распространения ошибки. Метод многократно описан в литературе.

**Логические закономерности.** Метод основан на вычислении коллективных решений по системам логических закономерностей. Под логической закономерностью понимается область признакового пространства, задаваемого с помощью конъюнкции неравенств для отдельных признаков (Рязанов, 2007; Журавлев и др., 2006).

**Голосование по тупиковым тестам.** Сравнение распознаваемого объекта с эталонными осуществляется по различным «информативным» подмножествам признаков. В качестве подобных подсистем признаков используются тупиковые тесты (или аналоги тупиковых тестов для вещественнозначных признаков) различных случайных подтаблиц исходной таблицы эталонов. Был предложен академиком РАН Ю.И. Журавлевым (Дмитриев и др., 1966).

**Q ближайших соседей.** Решение о классификации принимается по ближайшим соседям распознаваемого объекта. Сходство между объектами задается с помощью евклидовой метрики (Журавлев и др., 2006).

**Алгоритм вычисления оценок (АВО).** Распознавание осуществляется на основе сравнения распознаваемого объекта с эталонными по различным наборам признаков и на основе использования процедур голосования. АВО был предложен академиком РАН Ю.И. Журавлевым в начале 70-х годов XX в. (Журавлев, 1978). В описании были отражены передовые для того времени и сохраняющие свою актуальность концепции решения задач распознавания. Решение о классификации объекта принимается с помощью анализа интегральных оценок близости объекта к эталонным объектам каждого из классов по системам опорных множеств — подмножеств полного набора признаков. Признаками при-

нято называть всевозможные показатели, используемые для решения задачи распознавания. В нашем случае использовалась система опорных множеств, включившая всевозможные подмножества признаков из полного набора.

**Метод опорных векторов.** Изначально, с целью устранения неоднозначности, предлагалось производить разделение с помощью гиперплоскости, одинаково удаленной от двух параллельных гиперплоскостей, разделяющих классы. При этом выдвигалось требование максимизации «зазора» — расстояния между этими двумя гиперплоскостями. Далее были разработаны модификации метода, позволяющие строить оптимальные гиперплоскости с минимальным числом ошибочных классификаций в случаях отсутствия линейной разделимости. Наконец, была изобретена модификация, позволяющая строить также нелинейные разделяющие поверхности. Данная модификация основана на виртуальном переходе в новое гипотетическое пространство, в котором классы оказываются линейно разделимы. Подход основан на зависимости линейной гиперплоскости только от скалярных произведений векторов описаний объектов обучающей выборки. Поэтому для осуществления перехода достаточно приравнять скалярные произведения векторов описания объектов в гипотетическом пространстве к ядерным функциям в исходном пространстве признаков (*Chris, Burges, 1998*).

Прототипом метода опорных векторов являлся метод «Обобщенный портрет», разработанный В. Н. Вапником и А. Я. Червоненкисом (*Вапник и Червоненкис, 1974*). В современном варианте метод был предложен в работе (*Cortes and Vapnik, 1995*).

**Метод статистически взвешенных синдромов** — основан на принятии коллективных решений по системам синдромов двумерных областей признакового пространства, в котором преобладают объекты одного из распознаваемых классов. Области задаются с помощью границ, которые находятся через оптимальные разбиения интервалов значений

признаков. Метод СВС впервые был предложен в работе «Распознавание нечетких систем по методу статистически взвешенных синдромов» (Кузнецов и др., 1996).

**Метод мультимодельных статистически взвешенных синдромов.** Также был использован метод распознавания «Мультимодельные статистически взвешенные синдромы» (Senko, Kuznetsova, 2010). Отличием этого метода от метода СВС является использование не только одномерных разбиений, но и одновременный поиск оптимальных разбиений по парам переменных. При этом используются модели, в которых разбиения на парах показателей задаются с помощью границ, параллельных координатным осям, а также прямых линий под произвольным углом и сдвигом, дающих наилучшее разделение наблюдений из исследуемых классов.

### 3. Результаты

Метод **оптимальных достоверных разбиений** (ОДР) помог найти границы показателей, разделяющие интервал значений таким образом, чтобы с каждой стороны от границы были преимущественно наблюдения одного из исследуемых классов. Для каждого показателя оценивали эффективность найденной границы по специальному функционалу и определяли значимость каждого разбиения по соответствующему  $p$ -значению.

Сначала применяли метод ОДР для **одномерных показателей**. В табл. 2 приведены названия показателей по убыванию информативности с точки зрения разделения стран  $X$  и стран  $Y$ . Далее приведены границы разбиения по каждому показателю. В последующих столбцах показано число наблюдений  $X$ -стран, находящихся ниже границы, число наблюдений  $Y$ -стран — ниже границы, и аналогично число  $X$  и  $Y$  выше границы. Два последних столбца показывают функционал, по которому делают вывод о значимости показателя и достоверном  $p$ -значении.

Пример одномерного разбиения приведен на рис. 2.

Таблица 2. Наиболее информативные показатели при одномерных разбиениях. Расположены по убыванию значимости

| Показатель             | Граница   | Ниже границы |    | Выше границы |    | Функционал | p-значение |
|------------------------|-----------|--------------|----|--------------|----|------------|------------|
|                        |           | Y            | X  | Y            | X  |            |            |
| Урбан+транспорт        | −0,1776   | 0            | 13 | 13           | 5  | 15,648146  | 0,0005     |
| Амплитуда_осадков      | 85,28     | 13           | 5  | 0            | 13 | 15,648146  | 0,001      |
| Летние_температуры     | −0,3966   | 12           | 5  | 1            | 13 | 12,282372  | 0,0025     |
| Зимние_температуры     | 0,08505   | 13           | 7  | 0            | 11 | 11,916664  | 0,0040     |
| Min_t_градусов_Цельсия | 10,05     | 13           | 7  | 0            | 11 | 11,916664  | 0,001      |
| Уровень_рисков         | −0,5710   | 11           | 4  | 2            | 14 | 11,386751  | 0,0035     |
| Max_t_градусов_Цельсия | 21,7999   | 13           | 8  | 0            | 10 | 10,317460  | 0,011      |
| Летние_осадки_         | 0,3111    | 13           | 9  | 0            | 9  | 8,863636   | 0,0185     |
| Урожайность_зерновых   | 5058,5    | 3            | 14 | 10           | 4  | 8,825682   | 0,0245     |
| Зимние_осадки          | −0,680    | 0            | 8  | 13           | 10 | 7,536231   | 0,0465     |
| Амплитуда_температур   | 10,812950 | 0            | 8  | 13           | 10 | 7,536231   | 0,047      |

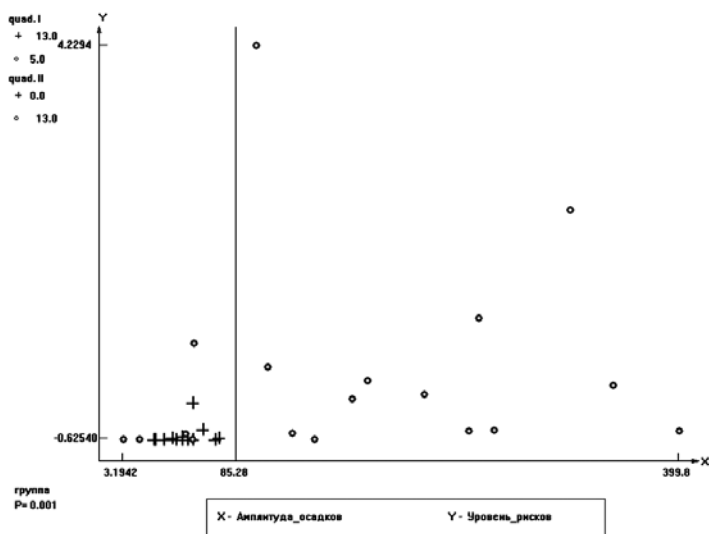


Рис. 2. По оси X – «Амплитуда осадков». По оси Y – «Уровень рисков», этот показатель взят только для развертки и роли не играет. Круги означают наблюдения стран X. Крестики – наблюдения стран Y

На диаграмме рассеяния видно, что высокие значения амплитуды осадков (выше 85,28) соответствуют только странам из группы X (13 наблюдений). В этой области нет ни одного наблюдения из группы стран Y. И наоборот, для всех стран из группы Y (13 наблюдений) амплитуды осадков имеют значения ниже границы. Хотя в этой области присутствует и 5 наблюдений из группы X. Достоверность разбиения, посчитанная с помощью перестановочного теста с использованием 3000 случайных перестановок индикатора класса, на уровне  $p = 0,001$ .

**Двухмерный вариант метода ОДР.** Далее метод ОДР был применен на парах показателей. Аналогично одномерным разбиениям для каждого показателя была найдена граница разбиений, чтобы с обеих сторон от границы преобладали объекты или стран X, или стран Y. Но в данном случае рассматривали уже квадранты, получающиеся при пересечении двух границ (см. табл. 3).

На диаграмме рассеяния (рис. 3) хорошо выражены области, в которых преимущественно находятся наблюдения какого-то одного из исследуемых классов. Так, закономерности для стран Y (синие крестики) отражены в II квадранте: высокая урбанизация и развитый транспорт (выше  $-0,1776$ ) при низком объеме амплитуды осадков (ниже 85,28). Достоверная значимость разбиения на уровне  $p_x = 0,0145$ . В то время как для X-стран, наоборот, характерны низкие значения интегрального показателя «Освоенность территории (Урбанизация + транспорт)» и высокие значения показателя «Амплитуды осадков» — квадранты I, II и IV. Достоверная значимость разбиения на уровне  $p_y = 0,014$ .

Из 15 показателей, вошедших в анализируемую базу, на одномерных разбиениях информативными оказались 11 показателей с достоверной значимостью  $p < 0,05$ .

При двумерных разбиениях — на парах признаков — добавились такие показатели, как «Ресурсы нефти и газа», «Сельскохозяйственная освоенность», «Ресурсы леса и воды».

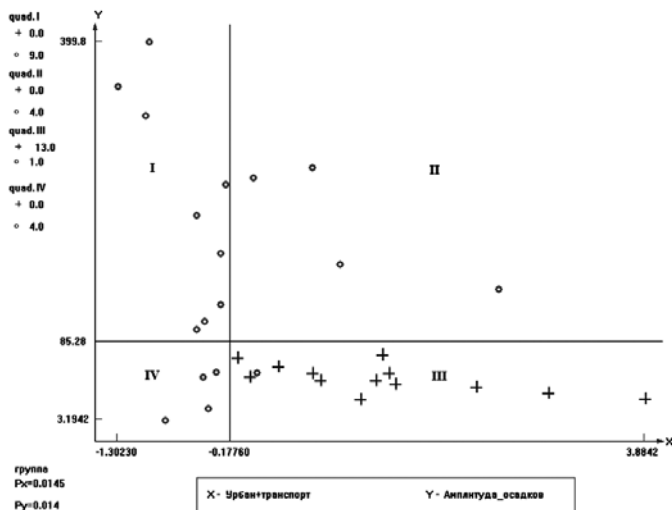


Рис. 3. По оси X значения интегрального показателя «Освоенность территории (урбанизация и транспорт)». По оси Y — исходный показатель «Амплитуда осадков». Кружки означают наблюдения стран X. Крестики — наблюдения стран Y

Таблица 3. Наиболее информативные показатели из достоверно значимых двумерных разбиений (за исключением показателей, вошедших в одномерные разбиения)

| 1-й показатель                   | 2-й показатель                   | Граница 1 | Граница 2 | $P_x$  | $P_y$  |
|----------------------------------|----------------------------------|-----------|-----------|--------|--------|
| Ресурсы_нефти_и_газа             | Амплитуда_осадков                | -0,2452   | 53,6      | 0,001  | 0,038  |
| Уровень_рисков                   | Сельскохозяйственная_освоенность | -0,1428   | -0,1373   | 0,0685 | 0,025  |
| Ресурсы_леса_и_воды              | Летние_температуры               | -0,1736   | -1,1073   | 0,018  | 0,0215 |
| Сельскохозяйственная_освоенность | Min_t_градусов_Цельсия           | 0,2334    | 3,3       | 0,035  | 0,01   |
| Ресурсы_леса_и_воды              | Сельскохозяйственная_освоенность | -0,1736   | 0,2334    | 0,037  | 0,0395 |
| Ресурсы_леса_и_воды              | Урожайность_зерновых             | 0,77325   | 3757,0    | 0,0195 | 0,0185 |

Показатель «Концентрация городского населения» в оба набора не вошел.

На диаграммах рассеяния представлены наиболее информативные с точки зрения разделения стран на категории X и Y пары показателей. По каждому из показателей автомати-



чески поставлены границы разбиения таким образом, чтобы с обеих сторон оставались наблюдения преимущественно одного класса.

На рис. 4 можно видеть, что в верхних и правых квадрантах (I, II и III) находятся исключительно наблюдения стран X (красные кружки). Это означает, что для данных стран интегральный показатель уровня рисков выше значения  $(-0,1428)$ . Достоверная значимость по данному показателю оценивается на уровне  $p_x = 0,035$ . Летние температуры выше интегрального значения  $(-0,089)$ ,  $p_y = 0,017$ . Для стран Y все наблюдения ограничены областью нижнего, левого квадранта (IV). То есть их значения ниже обеих границ. Следовательно, для этих стран характерны низкий уровень рисков и низкие летние температуры.

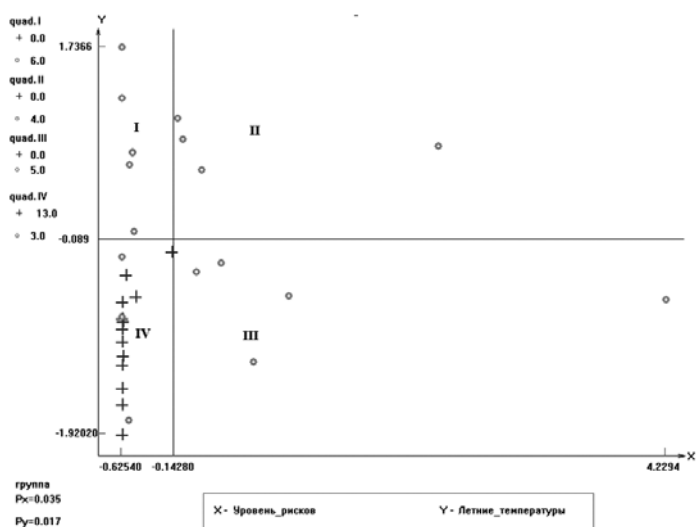


Рис. 4. По оси X — значения интегрального показателя «Уровень рисков». По оси Y — летние температуры. Кружки означают наблюдения стран X. Крестики — наблюдения стран Y

На данной диаграмме рассеяния (рис. 5) группа стран Y опять занимает нижнее левое положение. То есть для них характерны значения производного интегрального показателя

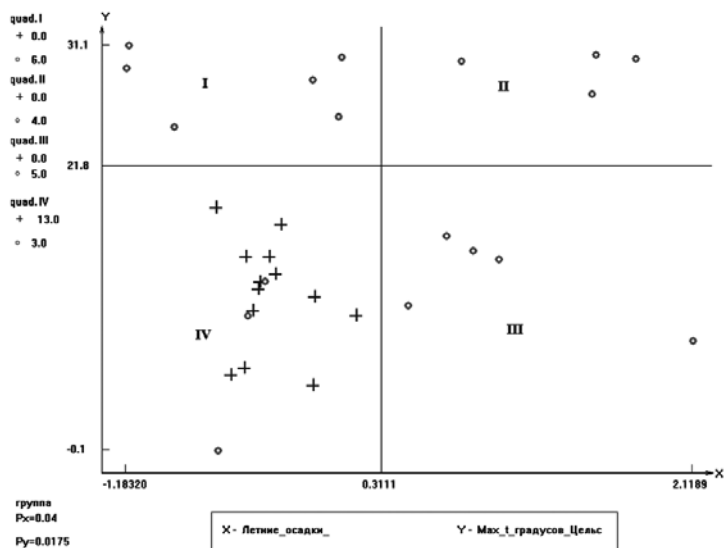


Рис. 5. Диаграмма рассеяния для показателей «Летние осадки» и «Максимальная температура по Цельсию». Обозначения, как на рис. 2

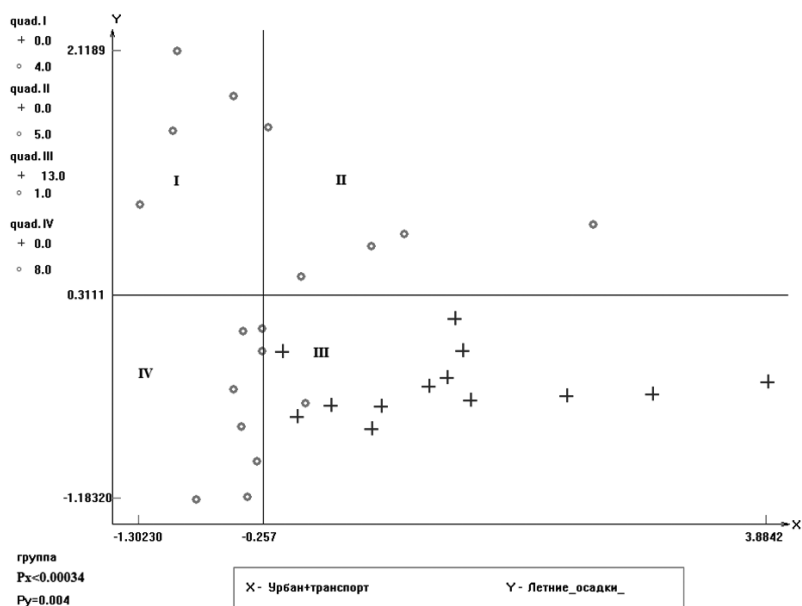


Рис. 6. Освоенность территории (урбанизация и транспорт) по оси X, летние осадки по оси Y. Обозначения, как на рис. 2

«Летние осадки» меньше 0,31 и значения исходного показателя «Максимальные температуры по Цельсию» ниже 21,8. Страны X занимают преимущественно верхние правые квадранты — выше границ. Три наблюдения класса X, попавшие в IV квадрант, вероятно, и дают ошибки при распознавании.

На диаграмме рассеяния (рис. 6) отражена найденная методом ОДР закономерность для стран Y: высокая урбанизация и развитый транспорт (интегральный показатель выше  $-0,257$ ) при низких значениях производного показателя «Летние осадки» (ниже 0,31). Для X-стран, наоборот, характерны низкие значения урбанизации и высокие объемы летних осадков.

**Методы распознавания** были применены для анализа эталонной (обучающей) выборки, содержащей 15 показателей (интегральных и исходных) по 31 стране. Наиболее эффективными оказались следующие методы распознавания: алгоритм вычисления оценок (ABO), метод опорных векторов (МОВ, support vector machine, SVM), метод статистически взвешенных синдромов, основанный на методе оптимальных разбиений (СВС), а также его модификация — мультимодельный метод статистически взвешенных синдромов (МСВС). Результаты распознавания на скользящем контроле представлены в табл. 4 и 5.

Наилучший результат распознавания показал метод «Алгоритмы вычисления оценок». При этом правильно было распознано в классе Y — 12 из 13 стран (92,3 %), в классе X — 16 из 18 стран (88,9 %), ошибочно отнесено три страны (Финляндия, Белоруссия и КНР). Метод опорных векторов и метод статистически взвешенных синдромов дали только 4 и 5 ошибок из 31 страны соответственно.

Аналогично теми же методами был проведен прогноз типа институциональной матрицы для 39 стран, для которых не было экспертно установленного класса. При прогнозировании использовали только методы, которые дали наилучший результат распознавания на обучающей выборке: ABO, СВС, МСВС и МОВ.

Таблица 4. Эффективность распознавания методов интеллектуального анализа данных из системы «Распознавание» и авторских методов распознавания

| №  | Название метода                                                 | Правильно из 31 | Точность распознавания, % |
|----|-----------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------|
| 1  | <b>Алгоритмы вычисления оценок (ABO)</b>                        | 28              | <b>90,3</b>               |
| 2  | <b>Метод опорных векторов (SVM)</b>                             | 27              | <b>87,1</b>               |
| 3  | <b>Статистически взвешенные синдромы (СВС)</b>                  | 26              | <b>83,9</b>               |
| 4  | Многослойный перцептрон (нейронная сеть)                        | 25              | 80,6                      |
| 5  | Мультимодельный метод статистически взвешенных синдромов (МСВС) | 25              | 80,6                      |
| 6  | Линейная машина                                                 | 25              | 80,6                      |
| 7  | Голосование по тупиковым тестам                                 | 24              | 77,4                      |
| 8  | Линейный дискриминант Фишера                                    | 24              | 77,4                      |
| 9  | Логические закономерности                                       | 22              | 71,0                      |
| 10 | Q ближайших соседей                                             | 20              | 64,5                      |

**Примечание.** Жирным шрифтом выделены наиболее успешные методы.

**Режимы, примененные в данном анализе.** МСВС: порог при отборе закономерностей на величину статистики критерия  $\chi^2$  –  $\text{porogXUU} = 5,0$ ;  $\text{porogCOMPL} = 0,2$  – коэффициент регулирует отбор разбиений при возрастании сложности модели; Recognition Cross Validation – режим использования скользящего контроля.

Метод опорных векторов (SVM): Тип потенциальной функции – Гауссиана, параметр потенциальной функции – 11,0.

## 4. Обсуждение

Почти все показатели, вошедшие в базу данных, оказались высоко информативными. Это свидетельствует о высокой эффективности применения метода главных компонент. Исключение составил показатель «Концентрация городского населения».

Таблица 5. Результаты скользящего контроля на обучающей выборке. Используемые методы: алгоритмы вычисления оценок (АВО), метод статистически взвешенных синдромов (СВС), его мульти모델ная модификация (МСВС), метод опорных векторов (МОВ)

| Страна/ метод        | Класс | АВО           |   | СВС          |   | МСВС         |   | МОВ          |   |
|----------------------|-------|---------------|---|--------------|---|--------------|---|--------------|---|
| Австрия              | Y     | −0,011        | Y | 0,488        | Y | 0,323        | Y | 0,391        | Y |
| Бельгия              | Y     | −0,065        | Y | 0,112        | Y | 0,165        | Y | 0,235        | Y |
| Дания                | Y     | −0,066        | Y | 0,112        | Y | 0,146        | Y | 0,269        | Y |
| Финляндия            | Y     | <b>0,047</b>  | X | 0,367        | Y | <b>0,543</b> | X | 0,482        | Y |
| Франция              | Y     | −0,128        | Y | 0,218        | Y | 0,204        | Y | 0,321        | Y |
| Германия             | Y     | −0,114        | Y | 0,112        | Y | 0,145        | Y | 0,257        | Y |
| Италия               | Y     | −0,092        | Y | <b>0,860</b> | X | <b>0,523</b> | X | 0,407        | Y |
| Нидерланды           | Y     | −0,209        | Y | 0,112        | Y | 0,165        | Y | 0,247        | Y |
| Норвегия             | Y     | −0,079        | Y | 0,367        | Y | 0,420        | Y | 0,472        | Y |
| Испания              | Y     | −0,061        | Y | <b>0,960</b> | X | <b>0,621</b> | X | <b>0,538</b> | X |
| Швеция               | Y     | −0,048        | Y | 0,167        | Y | 0,279        | Y | 0,410        | Y |
| Великобритания       | Y     | −0,141        | Y | 0,112        | Y | 0,269        | Y | 0,308        | Y |
| США                  | Y     | −0,049        | Y | <b>0,836</b> | X | 0,475        | Y | 0,433        | Y |
| Белоруссия           | X     | <b>−0,018</b> | Y | <b>0,064</b> | Y | <b>0,155</b> | Y | <b>0,385</b> | Y |
| Бразилия             | X     | 0,839         | X | 0,999        | X | 0,945        | X | 0,684        | X |
| КНР                  | X     | <b>−0,041</b> | Y | 0,847        | X | <b>0,478</b> | Y | 0,581        | X |
| Куба                 | X     | 0,346         | X | 0,993        | X | 0,889        | X | 0,804        | X |
| КНДР                 | X     | 1,030         | X | 0,763        | X | 0,684        | X | 0,644        | X |
| Египет               | X     | 0,456         | X | 0,918        | X | 0,719        | X | 0,668        | X |
| Япония               | X     | 0,006         | X | 0,755        | X | <b>0,461</b> | Y | <b>0,385</b> | Y |
| Лаос                 | X     | 0,169         | X | 0,999        | X | 0,968        | X | 0,906        | X |
| Мексика              | X     | 12,480        | X | 0,999        | X | 0,921        | X | 0,716        | X |
| Мьянма               | X     | 0,226         | X | 0,997        | X | 0,964        | X | 0,800        | X |
| Непал                | X     | 0,161         | X | 0,944        | X | 0,775        | X | 0,726        | X |
| Перу                 | X     | 0,353         | X | 0,999        | X | 0,944        | X | 0,640        | X |
| Филиппины            | X     | 0,487         | X | 0,999        | X | 0,931        | X | 0,804        | X |
| Республика Корея     | X     | 0,030         | X | 0,600        | X | 0,550        | X | 0,548        | X |
| Российская Федерация | X     | 0,009         | X | 0,696        | X | 0,531        | X | <b>0,258</b> | Y |
| Саудовская Аравия    | X     | 0,242         | X | 0,972        | X | 0,760        | X | 0,770        | X |
| ЮАР                  | X     | 0,009         | X | 0,943        | X | 0,553        | X | 0,552        | X |
| Венесуэла            | X     | 0,070         | X | 0,999        | X | 0,968        | X | 0,793        | X |

Примечание. Жирным шрифтом выделены значения ошибочного распознавания.

Таблица 6. Результаты распознавания стран, не вошедших в обучающую выборку

| Страна/ метод            | ABO    |   | CBC   |   | MCBC  |    | MOB   |   |
|--------------------------|--------|---|-------|---|-------|----|-------|---|
| Афганистан               | 0,088  | X | 0,865 | X | 0,522 | X  | 0,744 | X |
| Аргентина                | 0,084  | X | 0,657 | X | 0,409 | Y* | 0,481 | Y |
| Австралия                | 0,386  | X | 0,993 | X | 0,745 | X  | 0,708 | X |
| Боливия                  | 0,479  | X | 0,999 | X | 0,918 | X  | 0,742 | X |
| Болгария                 | −0,002 | Y | 0,276 | Y | 0,278 | Y  | 0,427 | Y |
| Камбоджа                 | 0,488  | X | 0,999 | X | 0,963 | X  | 0,942 | X |
| Канада                   | 0,331  | X | 0,586 | X | 0,429 | Y  | 0,350 | Y |
| Чили                     | −0,059 | Y | 0,211 | Y | 0,308 | Y  | 0,397 | Y |
| Колумбия                 | 0,489  | X | 0,999 | X | 0,966 | X  | 0,844 | X |
| Доминиканская Республика | 0,473  | X | 0,999 | X | 0,962 | X  | 0,792 | X |
| Эквадор                  | 0,480  | X | 0,999 | X | 0,951 | X  | 0,707 | X |
| Эфиопия                  | 0,462  | X | 0,999 | X | 0,907 | X  | 0,833 | X |
| Греция                   | −0,013 | Y | 0,937 | X | 0,578 | X  | 0,551 | X |
| Гватемала                | 0,478  | X | 0,999 | X | 0,962 | X  | 0,889 | X |
| Гондурас                 | 0,489  | X | 0,999 | X | 0,964 | X  | 0,856 | X |
| Венгрия                  | −0,085 | Y | 0,331 | Y | 0,242 | Y  | 0,405 | Y |
| Индия                    | 0,471  | X | 0,996 | X | 0,876 | X  | 0,873 | X |
| Индонезия                | 0,477  | X | 0,999 | X | 0,950 | X  | 0,738 | X |
| Иран                     | 0,315  | X | 0,987 | X | 0,748 | X  | 0,758 | X |
| Ирак                     | 0,441  | X | 0,995 | X | 0,833 | X  | 0,809 | X |
| Иордания                 | 0,354  | X | 0,997 | X | 0,854 | X  | 0,785 | X |
| Ливан                    | 0,003  | X | 0,978 | X | 0,717 | X  | 0,700 | X |
| Ливия                    | 0,454  | X | 0,995 | X | 0,841 | X  | 0,808 | X |
| Малайзия                 | 0,481  | X | 0,999 | X | 0,958 | X  | 0,760 | X |
| Марокко                  | 0,044  | X | 0,987 | X | 0,716 | X  | 0,640 | X |
| Никарагуа                | 0,478  | X | 0,999 | X | 0,962 | X  | 0,892 | X |
| Пакистан                 | 0,316  | X | 0,997 | X | 0,858 | X  | 0,729 | X |
| Парагвай                 | 0,396  | X | 0,999 | X | 0,918 | X  | 0,745 | X |
| Польша                   | −0,097 | Y | 0,121 | Y | 0,167 | Y  | 0,312 | Y |
| Португалия               | −0,045 | Y | 0,937 | X | 0,599 | X  | 0,531 | X |
| Румыния                  | −0,095 | Y | 0,211 | Y | 0,236 | Y  | 0,444 | Y |
| Шри Ланка                | 0,483  | X | 0,996 | X | 0,941 | X  | 0,837 | X |

| Страна/ метод | АВО    |   | СВС   |   | МСВС  |   | МОВ   |   |
|---------------|--------|---|-------|---|-------|---|-------|---|
| Судан         | 0,462  | X | 0,997 | X | 0,879 | X | 0,897 | X |
| Сирия         | 0,173  | X | 0,987 | X | 0,678 | X | 0,732 | X |
| Таиланд       | 0,486  | X | 0,999 | X | 0,954 | X | 0,911 | X |
| Тунис         | 0,111  | X | 0,997 | X | 0,847 | X | 0,673 | X |
| Турция        | –0,075 | Y | 0,331 | Y | 0,305 | Y | 0,477 | Y |
| Украина       | –0,056 | Y | 0,211 | Y | 0,298 | Y | 0,362 | Y |
| Вьетнам       | 0,481  | X | 0,999 | X | 0,928 | X | 0,842 | X |

**Примечание.** Жирным шрифтом выделены отнесения какого-то из методов к классу Y.

Наиболее информативными показателями оказались: «Освоенность территории» (Урбан + транспорт) –  $p < 0,0005$ , «Амплитуда\_осадков» –  $p < 0,001$ , «Летние\_температуры» –  $p < 0,0025$ , «Зимние\_температуры» –  $p < 0,004$ , «Min\_t\_градусов\_Цельсия» –  $p < 0,001$ , «Уровень\_рисков» –  $p < 0,0035$ .

Надо отметить характер расположения Y-стран на диаграммах рассеяния (см. рис. 2–6) – они располагаются значительно компактнее, с меньшим разбросом наблюдений, чем у стран X. То есть Y-способ организации обусловлен более благоприятными внешними условиями.

При этом для стран Y отмечены значения по освоенности территории выше границы разбиения ( $> -0,1776$ ), а для стран X – ниже (см. табл. 2). Что касается остальных климатических показателей, то страны Y занимают преимущественно положения с умеренными значениями (ниже границы) по амплитуде осадков ( $< 85,28$  мм), по летним ( $< -0,3966$ ) и зимним температурам ( $< 0,085$ ), по уровню рисков ( $< -0,571$ ), по минимальным ( $< 10,05^\circ \text{C}$ ) и максимальным ( $< 21,8^\circ \text{C}$ ) температурам, а также по летним осадкам ( $< 0,3$ ). Выше границы страны Y по урожайности зерновых ( $> 5058$  кг/га), по зимним осадкам ( $> -0,680$ ) и амплитуде температур ( $> 10,8$ ).

Для большинства стран, не вошедших в группу эталонных и не используемых при обучении, все четыре метода рас-

познавания дают одинаковый результат, что говорит о высокой точности отнесения к определенному классу. Но есть ряд стран, которые разные методы относят к разным классам. Такие страны, как Греция и Португалия, методом АВО отнесены в класс Y, а остальными тремя методами — в класс X. Аргентина и Канада отнесены в класс X методами АВО и СВС, а двумя другими методами в класс Y. Можно сделать заключение, что только климатических показателей и информации об освоенности территории недостаточно для того, чтобы однозначно относить каждую страну к тому или иному классу базовых институциональных матриц.

## Выводы

Результаты данной работы объективно подтверждают наличие статистически значимой связи между спецификой внешних условий существования государств и характером доминирующих в них институциональных матриц. Наиболее информативными показателями с точки зрения взаимосвязи климата и освоенности территории с особенностями матриц базовых институтов стали «Освоенность территории» (урбанизация + транспорт), амплитуда осадков, летние температуры, зимние температуры, минимальная температура (°C), уровень рисков.

Для стран с Y-институциональной матрицей характерно компактное расположение наблюдений, в то время как разброс значений климатических показателей для X-страны намного шире.

Использованные в работе методы теории распознавания позволяют работать со сложными социально-экономическими объектами неоднозначной природы. Определены методы, позволяющие распознавать государства с определенными институциональными матрицами (X или Y) наилучшим образом: это алгоритмы вычисления оценок (АВО), метод опорных векторов (МОВ), метод статистически взвешенных синдромов (СВС).



Перспективы работы связаны с выявлением дополнительных показателей, которые, вероятно, смогут сделать процедуру распознавания более эффективной.

## Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность д.соц.н., к.э.н. С.Г. Кирдиной, академику РАН, д.э.н. В.И. Маевскому, д.т.н. С.Ю. Малкову, д.х.н. Ю.А. Словохотову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.
2. Дмитриев А.Н., Журавлев Ю.И., Кренделев Ф.П. О математических принципах классификации предметов и явлений // Дискретный анализ. 1966. Вып. 7. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. С. 3–11.
3. Жуковская В.М., Мучник И.Б. Факторный анализ в социально-экономических исследованиях. М.: Статистика, 1976.
4. Журавлев Ю.И., Никифоров В.В. Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок // Кибернетика. 1971. С. 1–11.
5. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. 1978. Вып. 33. С. 5–68.
6. Журавлев Ю.И. Избранные научные труды. М.: Магистр, 1998.
7. Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В. «Распознавание». Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: Фазис, 2006.
8. Кирдина С.Г. Институциональные матрицы и развитие России. Введение в X-Y-теорию. Изд. 3-е, перераб., расш. и иллюстр. М.—СПб.: Нестор-История, 2014.
9. Кирдина С.Г. К анализу макроинституциональной циклической динамики. В: Эволюция экономической теории: воспроизводство, технологии, институты // Материалы X международного симпозиума по эволюционной экономике, г. Пушкино 12–14 сентября 2013 г. / Отв. ред. В.И. Маевский и С.Г. Кирдина. СПб.: Алетейя, 2015.
10. Кузнецов В.А., Сенько О.В., Кузнецова А.В. и др. Распознавание нечетких систем по методу статистически взвешенных синдромов и его применение для иммуногематологической характеристики нормы и хронической патологии // Химическая физика. 1996. Т. 15. № 1. С. 81–100.

11. Латова Н.В. В какой матрице мы живем? (Этнометрическая проверка теории институциональных матриц) // Экономический вестник Ростовского государственного университета. 2003. Т. I. № 3. С. 89–94.
12. Мельвил А.Ю. «Политический атлас современности»: замысел и общие теоретико-методологические контуры проекта // Полис. 2006. № 5. С. 6–14.
13. Рязанов В.В. Логические закономерности в задачах распознавания (параметрический подход) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1793–1808.
14. Chris. J.C. Burges A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition. Kluwer Academic Publishers, Boston. Manufactured in The Netherlands // Appeared in: Data Mining and Knowledge Discovery. 1998. 2. P. 121–167.
15. Cortes C. Vapnik V. Support-vector networks // Machine Learning. 1995. Vol. 20 (3): 273.
16. Hofstede G. (March 1993). Cultures and Organizations: Software of the Mind. Administrative Science Quarterly (Johnson Graduate School of Management, Cornell University) 38 (1): 132–134.
17. Kuznetsova A.V., Kostomarova I.V., Sen'ko O.V. Modification of the method of optimal valid partitioning for comparison of patterns related to the occurrence of ischemic stroke in two groups of patients // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. Vol. 24. Is. 1. P. 114–123.
18. Senko O.V., Kuznetsova A.V. The Optimal Valid Partitioning Procedures // «InterStat». <http://interstat.statjournals.net/YEAR/2006/articles/0604002.pdf>
19. Senko O.B., Kuznetsova A.B. A recognition method based on collective decision making using systems of regularities of various types // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. Vol. 20. No. 2. P. 152–162.

## 2.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНОГО ДИЗАЙНА

*Кириллук И.А.*

Terra Economicus. 2019. Т. 17. № 3. С. 64–77.

DOI: 10.23683/2073- 6606-2019-17-3-64-77.

JEL: B15, B25, B52, C02, C7, O43.

Институциональный дизайн представляет собой целенаправленные изменения в системе социально-экономических институтов. Это понятие широко используется в англоязычной литературе, иногда оно встречается и в русскоязычных публикациях. В экономике к процессам институционального дизайна относят установление правил использования общественных ресурсов, осуществление экономических реформ, создание и реформирование экономических организаций, существенно влияющих на отношения между группами экономических агентов и т.п. Среди множества публикаций, в которых обсуждаются процессы институционального дизайна, автором с использованием баз данных типа google scholar, elibrary.ru и поисковых сайтов отобраны для анализа те, где имеет место применение математических моделей и расчетов. Часть из них не содержит термина «институциональный дизайн», но содержит его синонимы или описывает частные случаи его применения. В статье предложена классификация применяемых в этих публикациях математических моделей. Среди них эконометрические модели, модели общего экономического равновесия, экономофизические модели, предполагающие применение в экономике методов теории нелинейных динамических систем, модели теории игр (в частности эволюционной теории игр и теории игр, связанных с коллективным использованием ресурсов), имитационные модели. Приведены примеры публикаций по конкретным видам моделей. Указаны сильные и слабые стороны применения различных типов моделей и математических методов, обсуждаются перспективы их использования. Особое внимание уделено применению в институциональном дизайне информационных

технологий, которые активно развиваются благодаря наличию интернета и больших вычислительных мощностей, а также разработке и освоению обществом технологии блокчейн.

**Ключевые слова:** институциональный дизайн; институциональная экономика; мезоэкономика; экономико-математическое моделирование; теория игр; эффективный альтруизм; эконофизика; эволюционная экономика.

**Благодарность:** работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-02-00207).

## MATHEMATICAL MODELLING FOR INSTITUTIONAL DESIGN

Institutional design is a targeted change to the system of socio-economic institutions. This concept is widely used in English-language literature, also sometimes in Russian-language publications. In economics, institutional design processes include the establishment of rules for the use of public resources, the implementation of economic reforms, the creation and reform of economic organizations that significantly affect relations between groups of economic agents, etc. From the many publications in which the processes of institutional design are discussed, the author, using databases such as google scholar, elibrary.ru and search sites, selected for analysis those where the application of mathematical models and calculations takes place. Some of them do not contain the term “institutional design”, but contain its synonyms or describe particular cases of its application. This article suggests the classification of mathematical models used in these publications. Among them are econometric models, models of general economic equilibrium, econophysical models involving the application in economics of the methods of the theory of nonlinear dynamic systems, models of game theory (in particular, evolutionary game theory and game theory related to the collective use of resources), and imitation models. Examples of publications about specific types of models are given. The strengths and weaknesses of the use of various types of models and mathematical methods are indicated and the prospects for their use are discussed. Particular attention

is paid to the use of information technology in institutional design, which is actively developing due to the presence of the Internet and large computing power, as well as the development and adoption of blockchain technology by society.

**Keywords:** institutional design; institutional economy; mesoeconomics; economic-mathematical modeling; game theory; effective altruism; econophysics; evolutionary economics.

**Acknowledgement:** this research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project №17-02-00207).

## Введение

Задачи реформирования экономики в той или иной степени стоят перед обществом практически постоянно. Институциональный дизайн представляет собой действия по целенаправленному существенному изменению социально-экономических институтов. В работах Д. Норта рассматривалось более объемное понятие институциональных изменений (*North, 1990*), в работах Э. Остром сфокусировано внимание на целенаправленных изменениях и сформулированы принципы институционального дизайна (*Ostrom, 1990*). Обзоры ключевых англоязычных и русскоязычных работ по институциональному дизайну приведены, соответственно, в статьях *Кругловой (2018)* и *Волынского (2018)*.

В данной статье обсуждаются цели, результаты и перспективы применения математического моделирования в задачах институционального дизайна и на примерах показана их важность в современном обществе. Математика при таком применении предстает не только как одно из средств описания существующих экономических систем, но и как инструмент изменения экономических процессов для лучшего удовлетворения потребностей населения (которое может выражаться в росте ВВП, продолжительности жизни, образованности, показателей счастья, устойчивости и безопасности долгосрочного развития общества). Таким образом, институциональный дизайн связан с нормативными эконо-

мическими теориями, т.е. с теориями, которые не просто описывают существующую экономику, а указывают, как она должна быть устроена.

Существует некоторая неопределенность использования понятия «институциональный дизайн», в том числе и в институциональной экономике (*Вольчик, 2003; Быконя, 2010*). Рядом авторов используются близкие к нему по смыслу понятия, такие как институциональное проектирование, моделирование, выращивание институтов и т.п. Перечень такого рода понятий содержится, например, в (*Жук, 2011*). Особым примером институционального дизайна является заимствование институтов из одних стран другими. Математические расчеты позволяют сделать прогноз того, какие институциональные заимствования в этих случаях могут оказаться полезными (*Полтерович & Старков, 2005*). В нашем исследовании проанализированы публикации, где математическое моделирование используется для исследования таких направлений институционального дизайна, как правила создания и изменений экономических организаций, правила пользования общими ресурсами, проведение экономических реформ (например, приватизации), другие целенаправленные изменения экономических институтов.

В следующих разделах, не претендуя на полноту, мы на конкретных примерах представим основные виды математических моделей, используемых при моделировании процессов институционального дизайна. Разделы сформированы в соответствии с предлагаемой классификацией моделей.

## 1. Эконометрические модели

Эконометрические модели применяются с разной степенью успешности в анализе широкого круга экономических задач, в том числе и при исследовании процессов и последствий институционального дизайна.

В рамках эконометрического подхода существенное изменение в какой-то момент времени состояния экономи-

ческой системы описывается понятиями структурных сдвигов (Каткова & Марков, 2014), или разладок, для исследования которых предложен ряд эконометрических тестов. Изменение системы социально-экономических институтов может оказывать влияние на свойства описывающих эти институты временных рядов, приводя к структурным сдвигам, что выражается в изменении средних значений показателей, их дисперсий, трендов и т.д. Когда институциональные изменения имеют экзогенный характер, исследование свойств структурных сдвигов полезно скорее для анализа уже имеющих место институциональных изменений, чем для прогнозов.

Приведем несколько примеров применения эконометрических методов к задачам институционального дизайна.

Большое число публикаций посвящено анализу количественных показателей, характеризующих взаимосвязь между институтами, экономическим ростом и основными макроэкономическими показателями. Обзоры литературы по этой теме представлены, например, в (Полтерович и др., 2009; Мамонов & Пестова, 2015; Назаров, 2016).

Эконометрические методы, применимые в частных задачах институционального дизайна, весьма разнообразны. Например, в работе (Яновский & Шульгин, 2008) приведен анализ связи институтов, уровня демократии и экономического роста с использованием анализа причинности по Грэнджеру. В работе (Туктамышева, 2014) для анализа последствий вступления России во Всемирную торговую организацию (ВТО) для Оренбургской области применяются такие эконометрические модели, как модель АРПСС (авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего), пороговые модели авторегрессии. В (Chen, 1998) для исследования зависимости эффективности банков от того, в частной или общей собственности они находятся, применяется непараметрический метод — анализ среды функционирования (англ. Data Envelopment Analysis).

Интересные мысли про эконометрический аппарат, релевантный для описания институциональных изменений,

изложены в (Цирель, 2005). В данной работе предлагается аналогия между процессом выбора институтов и марковскими процессами с «долгой памятью». Однако далее автор упоминает про «немарковский аспект» институциональных изменений. Интерпретация этой аналогии в том, что выбор конкретного устройства института в конкретный момент времени, с одной стороны, определяется «колеей» всего предшествующего развития, с другой стороны, сильно зависит от текущих случайных факторов. На наш взгляд, предлагаемый автором метод описания институциональных изменений подходит под определение процесса случайного блуждания.

Ограничение эконометрических методов и моделей в том, что они, будучи примененными для исследования свойств и закономерностей в различных эмпирических данных, как правило, не описывают экономических механизмов, определяемых конкретными экономическими теориями. Поэтому эконометрические модели могут быть полезны для краткосрочных прогнозов, преимущественно в ситуациях экономической стабильности.

## 2. Модели общего равновесия

Если простые эконометрические модели, аппроксимирующие эмпирические данные, далеко не всегда имеют интерпретацию в виде экономических законов, то модели, описывающие экономическое равновесие (например, общее экономическое равновесие на рынках товаров и услуг), в целом более обоснованы постулатами экономических теорий. У их истоков стоят модели Вальраса, Эрроу — Дебрё, в последние десятилетия разработаны вычислимые модели, т.е. модели, с помощью которых можно пытаться спрогнозировать реальные экономические ситуации, такие как CGE- и DSGE- модели.

Модель Эрроу — Дебрё, хотя предложена относительно давно, по-прежнему является инструментом исследований, в том числе и для анализа институциональных изменений.



Так, в (Макаров, 2003) модель Эрроу – Дебрё используется для анализа процессов создания институтов и их ликвидации. В работе (Габрилец & Тараканова, 2015) в терминах подхода Эрроу – Дебрё изучаются следствия приватизации и налоговых нагрузок на частную собственность для эффективности производства и социальной удовлетворенности, оценивается влияние экономической политики на значения ряда показателей равновесия.

С 1950-х годов важную роль в развитии экономики стран мира стал играть проектный подход. Математические методы широко используются при оценке эффективности масштабных инвестиционных и прочих проектов, в том числе связанных с изменением социально-экономических институтов. В случае проектов институционального дизайна представляют интерес не столько оценки окупаемости и прибыли проектов для инвесторов, влияние на налоги в бюджеты стран и муниципальных образований, сколько оценки экономической эффективности – воздействия проектов на общество и экономику в целом в регионах, где те или иные проекты реализуются в том числе с учетом мультипликативных эффектов. В качестве примера распространенного инструмента для таких оценок экономической эффективности институциональных преобразований можно привести вычислимые модели общего равновесия (известные также, как CGE-модели).

DSGE-модели используются, например, центральными банками стран мира для обоснования денежно-кредитной политики. Эти модели существуют в разнообразных вариантах и учитывают институциональные особенности применяющих их конкретных стран. Реализация проектов институционального дизайна может интерпретироваться в них, например, как разновидность шоков. В литературе напрямую обсуждается тема институционального дизайна для центральных банков (Beddies, 2000).

Модели общего экономического равновесия характерны для разных направлений экономической теории. В основу ряда математических моделей легли идеи Кейнса (например,

в интерпретации Хикса, или частично они лежат в моделях DSGE). Есть примеры их применения и в марксистской экономике (*Shibata, 1933*).

Разработкам в области математического моделирования происходившей в России перестройки посвящена статья академика РАН А.А. Петрова (*Петров, 1999*). В статье описаны результаты работы группы ученых из Вычислительного центра РАН, к началу российских рыночных реформ накопивших опыт математического моделирования как российской плановой экономики, так и западной рыночной, что позволило им моделировать происходившие в России в 1990-е годы экономические реформы с использованием моделей общего равновесия и вариационных принципов.

Модели общего равновесия в последние десятилетия интенсивно совершенствовались, они используются в практике прогнозирования и планирования государственными органами стран мира. Однако в некоторых аспектах и они подвергаются критике. В реальных экономиках бывают периоды интенсивного экономического роста или, наоборот, кризисные явления, когда ситуация явно неравновесная. Кроме того, распространено мнение, что в экономических системах может быть более одного равновесного состояния (а институциональный дизайн может приводить к их смене в системе). Более универсальным аппаратом представляются некоторым исследователям неравновесные модели, например модели эконофизики, описываемые ниже.

### 3. Эконофизические модели

Особенностью эконофизики является заимствование для экономических задач математического аппарата нелинейной динамики, обычно применяемого в естественных науках. Эконофизические модели способны описывать поведение систем с неравновесной, нелинейной динамикой. Непрерывные процессы описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, дискретные — системами отображений или, например, клеточными автоматами.

Для описания резких скачкообразных изменений в экономике, которые могут возникнуть как результат институционального дизайна, экономфизика предлагает релевантный математический аппарат, например теории катастроф или теории фазовых переходов (Словохотов, 2010). При этом возможности резкого изменения поведения переменных в данном случае являются эндогенными особенностями моделей.

Приведем несколько примеров применения экономфизического подхода к задачам институционального дизайна.

В работе (Шапошников и др., 2012) модель клеточного автомата использована для анализа процесса приватизации жилья в России за период 1990–2010 гг.

Одной из базовых непрерывных моделей, описывающих динамику взаимодействующих друг с другом популяций экономических агентов, является модель борьбы условных информаций Д.С. Чернавского (Чернавский, 2009). В работе (Малков & Кирилук, 2013) на основе модели борьбы условных информаций выведены условия, при которых соперничество между конкурирующими системами может приводить к росту показателей для обеих систем.

В статье (Березовская и др., 2012) рассматривается математическая модель, описывающая популяции агентов, которые конкурируют за потребляемый ими ресурс, а также участвуют в его обновлении. Исследуется, в каких режимах система устойчива (и может рассматриваться как «экологическая ниша»), в каких происходит коллапс системы, обусловленный «трагедией общего ресурса», и какими методами этой трагедии можно избежать (например, наказание за сверхпотребление, нелинейно растущее в зависимости от уровня сверхпотребления, и поощрение альтруизма). Используется математический аппарат нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Группой ученых из МГУ с использованием аппарата систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений моделируется процесс образования межстрановых объединений, например в рамках стран БРИКС (Садовнический и др., 2014), и исследуется его целесообразность.

В работе (Кирдина, 2010) на основе принципа диссимметрии Кюри и идей теории диссипативных структур И.Р. Пригожина обоснованы ограничения возможных изменений социально-экономических институтов, связанные с устойчивостью доминирующих институциональных матриц в общественной структуре.

Применимость методов нелинейной динамики в экономике имеет ограничения, заключающиеся в том, что в экономических системах, как правило, довольно короткие временные ряды, а для достоверного выявления различных нелинейных эффектов, таких как, например, детерминированный хаос, ряды данных должны быть достаточно длинными, а сами данные должны иметь достаточно высокую степень точности. Кроме того, базовые модели нелинейной динамики, как правило, содержат малое число уравнений, а в экономике не всегда очевидна применимость моделей малой размерности.

#### 4. Теория игр

Одной из целей институционального дизайна является создание условий для избегания конфликтных ситуаций. Однако сами институты, ограничивающие поведение человека, возникают как результат взаимодействия не всегда совпадающих между собой групп интересов, а также интересов общества в целом. Математической дисциплиной, предназначенной для изучения конфликтов и несовпадения интересов взаимодействующих друг с другом агентов (групп агентов), является теория игр. Поэтому в отличие от ряда других математических методов, например от эконометрического анализа, теория игр позволяет дать содержательную интерпретацию описываемых в задачах институционального дизайна ситуаций и предложить более обоснованные рекомендации. Выделим некоторые конкретные подходы в рамках теории игр, которые наиболее релевантны при моделировании процессов институционального дизайна.

Теория игр в своем классическом варианте связана с неоклассической экономикой и теориями экономического равновесия (поскольку в теории игр равновесие, достигаемое между игроками, играет ключевую роль).

Под непосредственным влиянием концепций Э. Остром и Блумингтонской школы (*Ostrom et al., 1994*) развивается направление в теории игр, называемое «common pool resource games» (общепринятый русскоязычный аналог этого термина нами не найден, название можно перевести как «игры, определяемые использованием общих ресурсов») (*Keser & Gardner, 1999*). Также развивается близкое направление «public good games» (игры, определяемые использованием публичных благ). При использовании общих ресурсов есть риск возникновения ситуации, которая называется «трагедия общин». Трагедия заключается в том, что отдельные индивидумы могут быть заинтересованы в интенсивном использовании общего ресурса без учета интересов окружающих в поддержании нужного количества ресурса в долгосрочной перспективе, и это приводит к истощению ресурса. Э. Остром с коллегами показала, что в определенных ситуациях этой трагедии можно избежать. Возникающие при использовании общих ресурсов устойчивые равновесные состояния и системы правил формализуются в рамках «common pool resource games». В подходе Э. Остром пристальное внимание уделяется не только «играм по заданным правилам», но и выбору (формированию) правил участниками.

В теории игр исторически значительную роль играет представление о рациональности игроков. Однако оно не является там всеобщим и неоспоримым. Тенденция последних лет — рост влияния эволюционной экономической теории на теорию игр. Институциональный дизайн применяется в среде с уже существующими институтами, развивающимися по законам эволюции социально-экономических систем. Поэтому ответ на вопрос о том, как именно должны быть изменены существующие системы институтов и какие новые институты целесообразно создавать для достижения нужных

результатов, имеет смысл искать с учетом результатов исследований в области эволюционной экономики и используемых в рамках этого направления математических моделей.

При этом эволюционная теория не делает акцента на рациональности вовлеченных в процесс эволюции субъектов, или агентов (скорее наоборот, став разумным, человечество стало привносить искажающие влияния в эволюционные процессы). Оптимизация в теории эволюции основана не на результатах воплощения долгосрочных рациональных планов эволюционирующих агентов, а является следствием естественного отбора в текущей ситуации. Традиции, веками сохраняющиеся в обществе, демонстрирующие устойчивость, являются результатом эволюции системы правил, но они могут в любой момент оказаться неадекватными при текущих внешних воздействиях.

Д.С. Чернавский в описании созданной им динамической теории информации (Чернавский, 2009) обращает внимание на то, что общество многообразно и в нем незаметно единого процесса глобальной оптимизации, поскольку в долгосрочной перспективе устойчиво сосуществуют разные типы языков, валют, правил, организаций и т.д.; постепенно меняясь, они не всегда вытесняют друг друга<sup>1</sup>.

На стыке теории игр и эволюционной теории возникло особое направление, называемое эволюционной теорией игр (Васин, 2009; Васин, 2010; Скоробогатов, 2014; Обыденков, 2018). Эта теория рассматривает не отдельных игроков, играющих друг с другом в определенную игру, а некоторые популяции игроков, которые играют в повторяющиеся игры по некоторым правилам с использованием определенных стратегий, не одинаковых для разных игроков. Стратегии подчиняются законам естественного отбора, и, таким образом, происходит развитие системы, предполагающее вытеснение одних стратегий другими.

- 
1. Изменения, не приводящие к скорому исчезновению изменившихся или тех, кого изменения не коснулись, существуют и в биологии, они являются результатом накопления квазинейтральных мутаций.

Хотя в настоящее время среди ученых доминирует точка зрения, что у эволюционного процесса нет заведомых целей, он породил цивилизацию разумных существ, у которых понятие целей появилось и как стремление к оптимизации. Но рациональность на современном этапе не является всеобщим свойством экономических агентов. Поэтому имеет смысл разработка теорий и соответствующего математического аппарата, которые сочетали бы в себе и стремление агентов к оптимизации, связанное с их рациональностью, и стихийные эволюционные процессы (в которых оптимизация тоже имеет место).

В рамках институционального дизайна решается не задача победы каких-либо агентов над другими в игре по заданным правилам, а задача изменения самих «правил игры», формирующихся на мезоуровне экономики таким образом, чтобы максимизировать цели общего блага. Эта проблема в различных аспектах затрагивается в теории дизайна экономических механизмов, за которую ее основоположник Л. Гурвиц, а также внесшие в ее развитие принципиальный вклад Э. Маскин и Р. Майерсон получили Нобелевскую премию по экономике в 2007 г. (Измалков и др., 2008). Эта теория позволяет более объективно анализировать экономику с использованием математического аппарата теории игр. Если традиционно экономисты постулировали законы своей науки в рамках определенных парадигм, то теория дизайна экономических механизмов позволяет делать сравнительный анализ разных подходов, выбирая из них оптимальные в конкретных ситуациях. Например, она позволяет анализировать области эффективной применимости рыночной или плановой экономики. К настоящему времени разработки в этой области оказали существенное влияние на микроэкономику, практику проведения аукционов, институциональную экономику, задав новые возможности ее формализации. В России близкими проблемами занимается коллектив, развивающий теорию активных систем (Бурков & Новиков, 2009).

Идеи дизайна механизмов и институционального дизайна (с позиций подхода Э. Остром) совместно обсу-

даются в (Anderies, 2014). Отметим также исследования по созданию математических моделей, которые проводятся Такаши Хашимото, Макото Нишибе и другими участниками японской ассоциации эволюционной экономики (Hashimoto & Nishibe, 2017). Важной особенностью их подхода является моделирование эндогенной динамики правил, характеризующих институты. Они вводят понятия метаправил как правил, по которым меняются «правила игры», говорят о динамике «экологии правил», поскольку правила в обществе составляют общую систему и их изменения влияют на изменения других правил. Их исследования являются развитием эволюционной теории игр и напрямую позиционируются как описание эволюционного институционального дизайна.

Широкое применение теории игр в общественных науках, в том числе в институциональной экономике и институциональном дизайне, является предметом дискуссий и подвергается критике, поскольку формализованное описание в рамках этой теории лишь приблизительно учитывает сложную систему взаимодействия между экономическими агентами в реальном мире. В качестве альтернатив приводятся, например, имитационное моделирование (Барбашин, 2017), системная динамика (Castillo & Saysel, 2005), пространственный подход (Ахременко и др., 2015). Также слабым местом классической теории игр является единственность выигрыша в качестве показателя эффективности. В реальной жизни приходится выбирать лучшие варианты стратегий с одновременным использованием различных критериев эффективности.

## 5. Перспективные направления математического моделирования в институциональном дизайне

Одной из новых областей с потенциалом применимости институционального дизайна являются инициативы, основанные на принципе так называемого «эффективного альтруизма». Методология математического моделирования на основе принципа «эффективного альтруизма» опирается на



разработки в том числе сингапурского экономиста Йоу Кванг Нг. Он известен не только как человек, предложивший свою интерпретацию понятия мезоэкономики и содействующий его популяризации, но и как один из ведущих специалистов в области экономики благополучия, утилитаризма, консеквенциализма, гедонизма и использования математики в этой сфере (Ng, 1975).

Сторонники этого направления выясняют при помощи количественного оптимизационного анализа, например, каким способом можно спасти максимальное количество жизней в каком-то месте Земли за определенную сумму денег, как оптимизировать свое рабочее время для пользы общества, какой реальный коэффициент полезного действия у различных благотворительных организаций и т.п. Более эффективное перераспределение финансовых средств с учетом особенностей условий институциональной среды, в которой живут благополучатели, ведет к уменьшению неравенства, бедности, заболеваемости, конфликтов в обществе. Ряд задач, оцениваемых количественными методами в рамках данного направления, — это задачи институционального дизайна, поскольку помощь в создании устойчивых социальных институтов по решению каких-либо проблем может оказаться существенно полезнее, чем разовая финансовая помощь в решении частной проблемы.

Другим перспективным направлением институционального дизайна является высокотехнологичный, так называемый «финансовый институциональный дизайн», сфера которого — создание новых типов банков, валют, производных финансовых инструментов и т.п. Как известно, здесь важную роль играет внедрение технологий блокчейн. Эти технологии имеют большие перспективы воздействия на социально-экономические институты, существенно изменяя систему транзакций, поэтому большой интерес представляет разработка моделей, учитывающих влияние внедрения технологий блокчейн (не только в связи со становлением и развитием криптовалют) на экономику и развитие общества.

По мере внедрения методов искусственного интеллекта в управление обществом математическое моделирование становится не просто инструментом описания экономики, но и инструментом воздействия на общество, оптимизации экономических процессов.

## Заключение

Описанные в данной статье факты приводят к выводу о том, что, несмотря на относительно малое количество статей, где явно оговаривается, что они посвящены математическому моделированию процессов институционального дизайна, это направление развивается как в мире, так и в России, и позволяет учитывать различные аспекты преобразований в реальной экономике. Более того, по мере дальнейшего внедрения информационных технологий в экономику роль математического моделирования для институционального дизайна становится все важнее. Оценка жизнеспособности и эффективности проектов изменения социально-экономических институтов осуществляется с использованием разнообразных математических моделей. В статье описаны типы таких моделей, приведена их классификация с описанием на модели эконометрические, общего экономического равновесия, эконофизические, теории игр и имитационного моделирования с указанием некоторых достоинств и недостатков моделей каждого типа. Приведены примеры публикаций, где применяются модели конкретных типов для решения конкретных практических задач. При этом нужно понимать, что подобные классификации имеют приблизительный, условный характер и возможно развитие, например, гибридных моделей, сочетающих в себе сильные стороны разных подходов.

Выражаю благодарность доктору социологических наук, к.э.н. С.Г. Кирдиной-Чэндлер за ценные советы в процессе подготовки статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахременко А.С., Петров А.П., Михайлов А.П. (2015). Формальная теория в институциональной политологии: есть ли жизнь за пределами теории игр? // Политическая наука. №2. С. 39–61.
2. Барбащин М.Ю. (2017). Имитационное моделирование и институциональные исследования // Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований). №9(3). С. 81–96.
3. Березовская Ф.С., Карева И.Г., Карев Г.П. (2012). Возможно ли предотвратить «трагедию общего ресурса»? // Математическая биология и биоинформатика. №7(1). С. 30–44.
4. Бурков В.Н., Новиков Д.А. (2009). Теория активных систем – 40 лет / В кн.: В.Н. Бурков, Д.А. Новиков (ред.) Теория активных систем. Труды международной научно-практической конференции (17–19 ноября 2009 г., Москва, Россия). Т. 1. М.: ИПУ РАН.
5. Быконя С.Ф. (2010). Институциональное строительство: принципы и направления // Наукові праці ДонНТУ. Серія: Економічна, (38-1), 42–49.
6. Васин А.А. (2009). Эволюционная теория игр и экономика. Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. №3. С. 10–27.
7. Васин А.А. (2010). Эволюционная теория игр и экономика. Часть 2. Устойчивость равновесий. Особенности эволюции социального поведения // Журнал Новой экономической ассоциации. №5. С. 10–27.
8. Волинский А.И. (2018). Институциональный дизайн и теория реформ в российском экономическом дискурсе // Terra Economicus. №16(4). С. 29–40.
9. Вольчик В.В. (2003). Институционализм: вторичность нового мифа? (Возможности и пределы институциональной экономики) // Экономический вестник Ростовского государственного университета. №1(1). С. 126–134.
10. Гаврилец Ю.Н., Тараканова И.В. (2015). Модель приватизации в условиях экономического равновесия: опыт компьютерного анализа. С. 5–19 / В кн.: Ю.Н. Гаврилец (ред.) Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов. Сборник научных трудов, вып. 6. М.: ЦЭМИ РАН.
11. Жук А.А. (2011). Провалы институционального строительства конкурентной среды // Экономические науки. №5. С. 44–49.
12. Измалков С., Сонин К., Юдкевич М. (2008). Теория экономических механизмов (Нобелевская премия по экономике 2007 г.) // Вопросы экономики. №1. С. 4–26.

13. Каткова М.А., Марков В.А. (2014). Применение эффекта гистерезиса трансакций в моделировании институционально-неравновесной экономики // Известия Томского политехнического университета. Социально-гуманитарные технологии. №325(6). С. 112–119.
14. Кирдина С.Г. (2010). Институциональные изменения и принцип Кюри // Экономическая наука современной России. №4. С. 28–62.
15. Круглова М.С. (2018). Теория институционального дизайна: от поиска идеальных институтов к работам Блумингтонской школы // Terra Economicus. №16(4). С. 17–28.
16. Макаров В.А. (2003). Исчисление институтов // Экономика и математические методы. №39(2). С. 14–32.
17. Малков С.Ю., Кирилук И.А. (2013). Моделирование динамики конкурирующих сообществ: варианты взаимодействия // Информационные войны. №2. С. 49–56.
18. Мамонов М.Е., Пестова А.А. (2015). Анализ технической эффективности национальных экономик: роль институтов, инфраструктуры и ресурсной ренты // Журнал Новой экономической ассоциации. №3. С. 44–78.
19. Назаров П.А. (2016). Моделирование влияния институциональной среды на основные макроэкономические показатели. Диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук. М.
20. Обыденков А.Ю. (2018). Математическая формализация институтов // Стратегические решения & риск-менеджмент. №4. С. 54–57.
21. Петров А.А. (1999). Анализ перестройки и реформы российской экономики методами математического моделирования // Экономическая наука современной России. №4. С. 7–44.
22. Полтерович В.М., Попов В.В., Тонис А.С. (2009). Концентрация доходов, нестабильность демократии и экономический рост с 2009 г. // Экономика и математические методы. №45(1). С. 15–29.
23. Полтерович В.М., Старков О.Ю. (2005). Создание массовой ипотеки в России: проблема трансплантации. Научные доклады. № R2–2005. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ.
24. Садовничий В.А., Акаев А.А., Коротаев А.В., Малков С.Ю. (2014). Комплексное моделирование и прогнозирование развития стран БРИКС в контексте мировой динамики / Научный совет по Программе фонд. исслед. Президиума Российской академии наук «Экономика и социология науки и образования». М.: Издательский дом «Наука».
25. Скоробогатов А.С. (2014). Эволюционный выбор институциональных норм в неэргодичном мире // Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований). №6(4). С. 98–115.

26. Словохотов Ю.Л. (2010). Аналоги фазовых переходов в экономике и демографии // Компьютерные исследования и моделирование. №2(2). С.209–218.
27. Туктамышева Л.М. (2014). Оценка влияния условий ВТО на динамику социально-экономических показателей Оренбургской области // Вестник Оренбургского государственного университета, (14), декабрь. С. 471–476.
28. Цирель С.В. (2005). QWERTY-эффекты, path dependence и закон Седова, или Возможно ли выращивание устойчивых институтов в России // Экономический вестник Ростовского государственного университета. №3(3). С. 44–56.
29. Чернавский Д.С. (2009). Синергетика и информация: динамическая теория информации. М.: ЛКИ.
30. Шапошникова Г.А., Плотникова Л.А., Плотникова М.Ю. (2012). Математическое моделирование процесса приватизации жилья в России с учетом психологического и ценового факторов // Обозрение прикладной и промышленной математики. №19(4). С. 603.
31. Яновский К., Шульгин С. (2008). Институты, демократия и экономический рост, тест 180-летнего развития // Экономическая политика, (3), июнь. С. 57–75.
32. Anderies J.M. (2014). Understanding the dynamics of sustainable social-ecological systems: Human behavior, institutions, and regulatory feedback networks // Bulletin of Mathematical Biology. No. 77(2). Pp. 259–280.
33. Beddies C.H. (2000). Selected issues concerning monetary policy and institutional design for central banks – a review of theories. Working Paper №140, International Monetary Fund, Washington.
34. Castillo D., Saysel A.K. (2005). Simulation of Common Pool Resource Field Experiments: A Behavioural Model of Collective Action // Ecological Economics. No. 55. Pp. 420–436.
35. Chen T.-Y. (1998). A study of bank efficiency and ownership in Taiwan // Applied Economics Letters. No. 5. Pp. 613–616.
36. Hashimoto T., Nishibe M. (2017). Theoretical model of institutional ecosystems and its economic implications // Evolut Inst Econ Rev. No. 14. Pp. 1–27.
37. Keser C., Gardner R. (1999). Strategic behavior of experienced subjects in a common pool resource game // International Journal of Game Theory. No. 28(2). Pp. 241–252.
38. Kirilyuk I.L., Kuznetsova A.V., Senko O.V., Morozov A.M. (2017). Method for detecting significant patterns in panel data analysis // Pattern

Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). No. 27(1). Pp. 94–104.

39. Ng Y.-K. (1975). Bentham or Bergson? Finite Sensibility, Utility Functions and Social Welfare Functions // Review of Economic Studies. No. 42(4). Pp. 545–569.
40. North D. (1990). Institutions, Institutional Change and Economic Performance. Cambridge University Press.
41. Ostrom E. (1990). Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action. Cambridge University Press.
42. Ostrom E., Gardner R., Walker J. (1994). Rules, Games, and Common-pool Resources. University of Michigan Press.
43. Shapley L.S., Shubik M. (1964). Ownership and the Production Function. Cowles Foundation Discussion Papers 167. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
44. Shibata K. (1933). Marx's Analysis of Capitalism and the General Equilibrium Theory of the Lausanne School // Kyoto University Economic Review. Vol. 8(1). Pp. 107–136.

## REFERENCES

1. Akhremenko A.S., Petrov A.P., Mikhailov A.P. (2015). Formal theory in institutional political science: Is there life outside the theory of games? // Political Science. No. 2. Pp. 39–61. (In Russian.)
2. Anderies J.M. (2014). Understanding the dynamics of sustainable social-ecological systems: Human behavior, institutions, and regulatory feedback networks // Bulletin of Mathematical Biology. Vol. 77. No. 2. Pp. 259–280.
3. Barbashin M.Y. (2017). Imitation modeling and institutional studies // Journal of Institutional Studies. Vol. 9. No. 3. Pp. 81–96. (In Russian.)
4. Beddies C.H. (2000). Selected issues concerning monetary policy and institutional design for central banks – a review of theories. Working Paper №140, International Monetary Fund, Washington.
5. Berezovskaya F.S., Kareva I.G., Karev G.P. (2012). Is it possible to prevent the “Tragedy of Common Resource”? // Mat. Biolog. Bioinform. Vol. 7. No. 1. Pp. 30–44. (In Russian.)
6. Burkov V.N., Novikov D.A. (2009). Theory of Active Systems – 40 years / In: V. N. Burkov & D. A. Novikov (eds.) Theory of Active Systems. Proceedings of the international scientific-practical conference (November 17–19, 2009, Moscow, Russia), vol I. Moscow: Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences/ (In Russian.)
7. Bykonya S.F. (2010). Institutional Construction: Principles and Directions. Scientific works of the Donetsk National Technical University. Series: Economics (38-1). Pp. 42–49. (In Russian.)

8. *Castillo D., Saysel A.K.* (2005). Simulation of Common Pool Resource Field Experiments: A Behavioural Model of Collective Action // *Ecological Economics*. No. 55. Pp. 420–436.
9. *Chen T.-Y.* (1998). A study of bank efficiency and ownership in Taiwan // *Applied Economics Letters*. No. 5. Pp. 613–616.
10. *Chernavsky D.S.* (2009). Synergetics and information: Dynamic information theory. Moscow: LKI Publ. (In Russian.)
11. *Gavrilets Yu.N., Tarakanova I.V.* (2015). Model of privatization in the conditions of economic equilibrium: the experience of computer analysis. Pp. 5–19 / In: N.N. Gavrilets (ed.) *Mathematical and computer modeling of socio-economic processes. Collection of scientific works*, Issue 6. Moscow: CEMI RAS Publ. (In Russian.)
12. *Hashimoto T., Nishibe M.* (2017). Theoretical model of institutional ecosystems and its economic implications // *Evolut Inst Econ Rev*. No. 14. Pp. 1–27.
13. *Izmalkov S., Sonin K., Yudkevich M.* (2008). The Theory of Economic Mechanisms (Nobel Prize in Economics 2007) // *Voprosy ekonomiki*. No.1. Pp. 4–26. (In Russian.)
14. *Katkova M.A., Markov V.A.* (2014). Application of transaction hysteresis effect in modelling institutional nonequilibrium economy. *Bulletin of the Tomsk polytechnic university // Social and humanity technologies*. Vol. 325. No. 6. Pp. 112–119. (In Russian.)
15. *Keser C., Gardner R.* (1999). Strategic behavior of experienced subjects in a common pool resource game. *International Journal of Game Theory*, 28(2), 241–252.
16. *Kirdina S.G.* (2010). Institutional changes and the Curie principle. *Economics of Contemporary Russia*, (4), 28–62. (In Russian.)
17. *Kirilyuk I.L., Kuznetsova A.V., Senko O.V., Morozov A.M.* (2017). Method for detecting significant patterns in panel data analysis. *Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications)*, 27(1), 94–104.
18. *Kruglova M.S.* (2018). Theory of institutional design: from the search for ideal institutions to the works of Blomington school. *Terra Economicus*, 16(4), 17–28. (In Russian.)
19. *Makarov V.L.* (2003). Calculus of institutions. *Economics and the Mathematical Methods*, 39(2), 14–32. (In Russian.)
20. *Malkov S.Yu., Kirilyuk I.L.* (2013). Modeling the dynamics of competing communities: interaction options. *Information wars*, (2), 49–56. (In Russian.)
21. *Mamonov M.Ye., Pestova A.A.* (2015). Analysis of technical efficiency of national economies: the role of institutions, infrastructure and

- resource rent. *Journal of the New Economic Association*, (3), 44–78. (In Russian.)
22. *Nazarov P.A.* (2016). Modeling the influence of the institutional environment on the main macroeconomic indicators. Dissertation submitted for the degree of Cand. Sci. Economics. Moscow. (In Russian.)
23. *Ng Y.-K.* (1975). Bentham or Bergson? Finite Sensibility, Utility Functions and Social Welfare Functions. *Review of Economic Studies*, 42(4), 545–569.
24. *North D.* (1990). *Institutions, Institutional Change and Economic Performance*. Cambridge University Press.
25. *Obydenov A Yu.* (2018). Mathematical formalization of institutions. Strategic decisions and risk management, (4), 54–57. (In Russian.)
26. *Ostrom E.* (1990). *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action*. Cambridge University Press.
27. *Ostrom E., Gardner R., Walker J.* (1994). *Rules, Games, and Common-pool Resources*. University of Michigan Press.
28. *Petrov A.A.* (1999). Analysis of perestroika and reform of the Russian economy by methods of mathematical modeling. *Economic Science of Modern Russia*, (4), 7–44. (In Russian.)
29. *Polterovich V.M., Starkov O.Yu.* (2005). Creating a massive mortgage in Russia: the problem of transplantation. *Scientific Reports №R2-2005*. Saint Petersburg: Research Institute of Management, St. Petersburg State University Publ. (In Russian.)
30. *Polterovich V.M., Popov V.V., Tonis A.S.* (2009). The concentration of income, the instability of democracy and economic growth since 2009. *Economics and Mathematical Methods*, 45(1), 15–29. (In Russian.)
31. *Sadovnichii V.A., Akayev A.A., Korotaev A.V., Malkov S.Yu.* (2014). Comprehensive modeling and forecasting of the development of the BRICS countries in the context of world dynamics / *Scientific Council on the Fundamental Research Fund. Presidium of the Russian Academy of Sciences «Economics and Sociology of Science and Education»*. Moscow: Publishing House «Nauka». (In Russian.)
32. *Shapley L.S., Shubik M.* (1964). Ownership and the Production Function. *Cowles Foundation Discussion Papers 167*. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
33. *Shaposhnikova G.A., Plotnikova L.A., Plotnikova M.Yu.* (2012). Mathematical modeling of the process of housing privatization in Russia taking into account the psychological and price factors. *Survey of Applied and Industrial Mathematics*, 19(4), 603. (In Russian.)
34. *Shibata K.* (1933). Marx's Analysis of Capitalism and the General Equilibrium Theory of the Lausanne School. *Kyoto University Economic Review*, 8(1), 107–136.



35. *Skoorbogatov A.S.* (2014). Evolutionary choice of institutional norms in the non-ergodic environment. *Journal of Institutional Studies*, 6(4), 98–115. (In Russian.)
  36. *Slovohotov Yu.L.* (2010). Analogues of phase transitions in economics and demography. *Computer Research and Modeling*, 2(2), 209–218. (In Russian.)
  37. *Tsirel S.V.* (2005). QWERTY effects, path dependence and Sedov's law, or is it possible to grow sustainable institutions in Russia. *Economic Herald of Rostov State University*, 3(3), 44–56. (In Russian.)
  38. *Tuktamysheva L.M.* (2014). Evaluation of the impact of WTO conditions on the dynamics of socio-economic indicators of the Orenburg region. *Bulletin of Orenburg State University*, (14), December, 471–476. (In Russian.)
  39. *Vasin A.A.* (2009). Evolutionary game theory and economics. Part 1. Principles of optimality and models of behavior dynamics. *Journal of the New Economic Association*, (3), 10–27. (In Russian.)
  40. *Vasin A.A.* (2010). Evolutionary game theory and economics. Part 2. Stability of equilibria. Peculiarities of the evolution of social behavior. *Journal of the New Economic Association*, (5), 10–27. (In Russian.)
  41. *Volchik V.V.* (2003). Institutionalism: the secondary nature of the new myth? (Opportunities and Limits of Institutional Economics). *The Economic Herald of Rostov State University*, 1(1), 126–134. (In Russian.)
  42. *Volynskii A.I.* (2018). Institutional design and theory of reforms in Russian economic discourse. *Terra Economicus*, 16(4), 29–40. (In Russian.)
  43. *Yanovski K., Shulgin S.* (2008). Institutions, Democracy and Economic Growth, a Test of 180 Years of Development. *Economic Policy*, (3), June, 57–75. (In Russian.)
  44. *Zhuk A.A.* (2011). The failures of the institutional construction of a competitive environment. *Economic Sciences*, (5), 44–49. (In Russian.)
-



### Раздел 3

## ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ МАКРО- И МЕЗО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 3.1. МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

*Кириллюк И.А.*

Компьютерные исследования и моделирование. 2013.  
Т. 5. № 2. С. 293—312.

В статье проведен сравнительный анализ применимости нескольких вариантов моделей производственной функции для анализа современной экономики России. Посредством регрессионного анализа оценено влияние таких факторов, как цены на нефть на мировом рынке, инновационные процессы, гипотеза о постоянной отдаче от факторов производства. Расчеты производились как для экономики в целом, так и для отдельных ее отраслей. Показано, что рассматриваемые модели экономики России в целом и ряда ее отраслей применительно к реальным данным демонстрируют значимую возрастающую отдачу по труду. Обсуждаются ограничения применимости моделей.

**Ключевые слова:** производственные функции, функции Кобба—Дугласа, отдача от факторов производства, регрессионный анализ, Россия.

Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ (проекты № 11-02-00088а и № 13-02-14010)

#### MODELS OF PRODUCTION FUNCTIONS FOR THE RUSSIAN ECONOMY

A comparative analysis of the applicability of several variants of the production function models for the analysis of modern Russian economy is presented in a paper. Through regression analysis, the effect of such factors as the oil prices on the world market, the innovation, the hypothesis of constant returns to factors of production is estimated. Calculations were made both for the economy as a whole and for separate industries. It is shown that the models of the economy of Russia as a whole and some of its industries in relation to real data have significant increasing returns to labor. Limits of applicability for the models are discussed.

**Keywords:** production functions, Cobb—Douglas functions, returns to factors of production, regression analysis, Russia.

## 1. О применимости степенной производственной функции для анализа макроэкономики

Зависимость величины выпуска какой-либо продукции от факторов производства описывается производственной функцией.

Как правило, экономический анализ с использованием аппарата производственных функций проводится на уровне микроэкономики. Большинство известных экономистов — неоклассиков XIX века предпочитали не объединять производственные функции фирм в агрегированную производственную макроэкономическую функцию (Блауг, 2004). И позже рядом авторов были высказаны критические соображения относительно такого агрегирования (см., например, (Робинсон, 1954)), связанные с трудностями корректного определения в макроэкономике таких агрегированных величин, как, например, капитал. Однако, в том числе, в русскоязычной литературе известны примеры исследования динамики отдачи основных производственных ресурсов на макроуровне (соответствующие работы указаны в разделе 6 данной статьи), где показана успешность применения агрегированных производственных функций для описания экономики целых государств.

В макроэкономике производственные функции могут использоваться при изучении зависимости ВВП страны от величины имеющихся в стране основных фондов (капитала) и труда, определяемого количеством занятых работников. Иногда производственные функции используют для решения других задач, например, для прогнозирования занятости в отраслях промышленности России (Гневашева, 2005).

Одной из характеристик производства является так называемая отдача факторов, используемых в экономике. Она характеризует, насколько эффективно увеличивается производство товаров или услуг при введении в систему некоторых дополнительных ресурсов. Когда количество произведенного продукта увеличивается пропорционально увеличению коли-

чества затрачиваемых на его выпуск ресурсов каждого вида, говорят о постоянной отдаче. Если увеличение количества ресурсов приводит к более высоким темпам роста производительности (например, благодаря появляющимся новым возможностям оптимизации производства), отдача называется возрастающей. А если рост выпуска происходит медленнее, чем при постоянной отдаче (например, за счет увеличения издержек из-за несовершенства технологий и оборудования, неэффективности использования ресурсов), говорят об убывающей отдаче.

Традиционно в экономической теории использовался в основном постулат о наличии постоянной или убывающей отдачи. Это подтверждалось эмпирическими сведениями и являлось условием экономического равновесия. Однако возрастающая отдача также выявлена в ряде отраслей экономики и ряде стран (см., например, обзор (*Кирдина, Малков, 2010*)).

В данной статье мы рассмотрим, какова динамика отдачи основных факторов производства российской экономики в постперестроечный период.

## 2. Характеристики степенной производственной функции

В экономических исследованиях часто используются производственные функции, имеющие следующий вид<sup>1</sup>

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \quad (1)$$

где  $Y$  — выпуск продукции (или ВВП),  $K$  — капитал (или основные фонды),  $L$  — труд (который может характеризоваться количеством работников),  $\alpha$  — константа (коэффициент эластичности производства по капиталу  $K$ ),  $\beta$  — коэффи-

---

1. Производственная функция такого вида известна как функция Кобба–Дугласа, использованная американскими исследователями Ч. Коббом и П. Дугласом при анализе влияния затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США в 1920–30-х гг.

циент эластичности производства по труду  $L$ ,  $A$  — коэффициент, в простейшем случае являющийся константой, которую часто связывают с уровнем технологий, хотя на самом деле он может зависеть и от других факторов, не относящихся непосредственно к труду, или капиталу. Например, в России ВВП может существенно зависеть от изменения цен на нефть на мировом рынке (Дубовский, 2012; Синельников-Мурылев и др., 2009; Казакова, Синельников-Мурылев, 2009; Подкорытова и др., 2011; Брагинский, 2008; Жилыев, 2004; Ловянников, 2007). Кроме того, уровень технологий можно в каких-то случаях считать постоянным, а в других возрастающим, выделив в явной форме соответствующий временной тренд в производственной функции.

Отметим, что в общем случае коэффициент  $A$  можно было бы считать некоторой функцией от времени. Но при произвольно зависящем от времени  $A$  мы не можем на основе имеющихся данных рассчитать определенные значения коэффициентов. Поэтому в наших расчетах мы везде считаем  $A$  постоянным, вынося временной тренд конкретного вида в качестве отдельного множителя. Но нужно понимать, что изменение гипотезы о виде зависимости  $A$  от времени может изменить итоговые выводы из соответствующих расчетов о характере отдачи от факторов производства.

Также можно рассматривать случаи, когда от времени зависят и другие коэффициенты. Так, в работе (Назруллаева, 2010) упоминается модель, в которой эластичность капитала  $\alpha$  изменяется во времени пропорционально объему осуществленных отраслью инвестиций. Мы подобные модели здесь не рассматриваем и считаем все коэффициенты постоянными. Однако изменение величины и знака коэффициентов эластичности во времени может играть существенную роль в развитии экономических систем и устранить некоторые трудности в интерпретации, возникающие при предположении о неизменном характере отдачи.

Учитывая отмеченные в литературе роль цен на нефть на мировых рынках для динамики российского ВВП и значение

временного тренда, мы сравним различные варианты аппроксимации с использованием более общего, чем (1) вида производственной функции, а именно варианты функций вида:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} P^{\gamma} e^{\zeta t}, \quad (2)$$

где  $P$  — значения цены на нефть за данные годы,  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий степенную зависимость ВВП от мировых цен на нефть,<sup>2</sup>  $\zeta$  — коэффициент, характеризующий экспоненциальный временной тренд.

В работе (Копотева, Черный, 2011) сказано, что экспоненциальный множитель типа  $e^{\zeta t}$  характеризует эффект от внедрения инновационных процессов в экономике. С другой стороны, введение этого множителя уменьшает эффект ложной регрессии, связанной с наличием у переменных общего детерминированного тренда. Существуют также методы учета возможности других проявлений ложной регрессии, связанные с понятием коинтеграции временных рядов (Engle, Granger, 1987). Но используемые нами временные ряды данных весьма короткие, и мы не уверены в надежности применения этих методов к используемым нами данным. Поэтому, как и большинство авторов статей, которые мы обсуждаем в разделе 6, мы их не используем.

Переменные  $Y$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $P$  берутся из эмпирических данных, а коэффициенты  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$  должны быть вычислены (разумеется, учет последних двух множителей в (2) при аппроксимации эмпирических данных будет приводить к изменению расчетных  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ).

При исследовании разных вариантов моделей мы полагаем либо  $\gamma = 0$ , то есть отсутствие влияния цен на нефть на ВВП, либо он вычисляется посредством формул регрессии.

- 
2. С возможными способами учета влияния цен на нефть на макроэкономические показатели можно ознакомиться, например, в (Дубовский, 2012; Синельников-Мурылев и др., 2009; Казакова, Синельников-Мурылев, 2009).



Коэффициент  $\zeta$  мы также полагаем или  $\zeta = 0$ , то есть, отсутствие временного тренда, или он вычисляется посредством формул регрессии. Переменная  $t$  обозначает время.

Кроме того, нас интересует справедливость соотношения  $\beta = 1 - \alpha$ . Дело в том, что в функции Кобба–Дугласа величина  $\alpha + \beta$  характеризует отдачу от масштаба следующим образом:

- $\alpha + \beta < 1$  — убывающая отдача,
- $\alpha + \beta = 1$  — постоянная отдача,
- $\alpha + \beta > 1$  — возрастающая отдача.

Отдача возрастающая, если при увеличении количества используемых ресурсов на 1 итоговый показатель, в данном случае ВВП, увеличивается более чем на 1.

Преобразованием  $y = Y/L$ ,  $k = K/L$  при условии  $\beta = 1 - \alpha$ , то есть постоянной отдачи, можно уменьшить число переменных в системе на одну:

$$y = A k^{\alpha} p^{\gamma} \epsilon^{\zeta t}. \quad (3)$$

Соответствие ее с достаточно высокой точностью эмпирическим данным (по принятым в эконометрике критериям [Дрейпер, Смит, 1986]) позволило бы обойтись без необходимости использования более сложных гипотез, таких как нестационарность коэффициента  $A$ , или непостоянная отдача от масштаба (то есть невыполнение соотношения  $\beta = 1 - \alpha$ ).

### 3. Используемые данные

Все данные, которые мы используем в расчетах на уровне экономики в целом, отражены в табл. 1.

Капитал в постоянных ценах был исчислен с использованием годового индекса — дефлятора валового накопления основного капитала за период 2003–2010 гг., поскольку в базе данных на сайте Федеральной службы государственной статистики (*Росстат*, 2012) обнаружены данные по этому индексу только за эти годы. Для расчетов за предыдущий период (1996–2002) использовались данные индекса — дефлятора ВВП, приведенные на том же сайте (*Росстат*, 2012).

Таблица 1. **Используемые в статье показатели экономики России в целом**

| Год  | L – численность занятых РФ, тыс. чел. | K – основные фонды РФ (в постоянных ценах 2008 г., млн руб.) | P – цена на нефть Urals, долл./барр | Y – ВВП (в постоянных ценах 2008 г., млрд. руб.) | Индексы – дефляторы валового внутреннего продукта, % к предыдущему году | Индексы – дефляторы валового накопления основного капитала, % к предыдущему году |
|------|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1995 | 66330                                 | 71476961,62                                                  | 16,7                                | 22908,3                                          |                                                                         | –                                                                                |
| 1996 | 65748                                 | 122401130,1                                                  | 20                                  | 22081,8                                          | 145,8                                                                   | –                                                                                |
| 1997 | 64574                                 | 107660685,4                                                  | 18,4                                | 22386,8                                          | 115,1                                                                   | –                                                                                |
| 1998 | 63683                                 | 96638783,94                                                  | 11,9                                | 21190,2                                          | 118,6                                                                   | –                                                                                |
| 1999 | 64114                                 | 56258271,21                                                  | 17,4                                | 22536                                            | 172,5                                                                   | –                                                                                |
| 2000 | 64517                                 | 49796155,32                                                  | 26,9                                | 24799,9                                          | 137,6                                                                   | –                                                                                |
| 2001 | 64980                                 | 52614224,95                                                  | 23                                  | 26062,5                                          | 116,5                                                                   | –                                                                                |
| 2002 | 65574                                 | 55751383,78                                                  | 23,7                                | 27312,3                                          | 115,6                                                                   | –                                                                                |
| 2003 | 65979                                 | 61866979,09                                                  | 27,2                                | 29304,9                                          | 113,8                                                                   | 110,1                                                                            |
| 2004 | 66407                                 | 58669932,22                                                  | 34,4                                | 31407,8                                          | 120,3                                                                   | 114,3                                                                            |
| 2005 | 66792                                 | 63002572,25                                                  | 50,6                                | 33410,5                                          | 119,3                                                                   | 110,8                                                                            |
| 2006 | 67174                                 | 65551463,71                                                  | 60,1                                | 36134,6                                          | 115,2                                                                   | 110                                                                              |
| 2007 | 68019                                 | 71986613,17                                                  | 69,3                                | 39218,7                                          | 113,8                                                                   | 115,8                                                                            |
| 2008 | 68474                                 | 74441095                                                     | 61,1                                | 41276,8                                          | 118,0                                                                   | 119,2                                                                            |
| 2009 | 67463                                 | 75925248,15                                                  | 78,2                                | 38048,6                                          | 102,0                                                                   | 108,4                                                                            |
| 2010 | 67582                                 | 79011568,67                                                  | 109,3                               | 39699,9                                          | 111,6                                                                   | 108,8                                                                            |

Источники: Y: (*Росстат*, 2012) – таблица в подразделе «Национальные счета» раздела официальной статистики на сайте Федеральной службы государственной статистики; L: (*Росстат*, 2012) – раздел «Труд» Российского статистического ежегодника (данные за разные годы приводятся в разных выпусках); P: (*Top Oil News*, 2012) – данные с сайта о ценах на нефть, усредненные по годам; K: (*Росстат*, 2012) – вычислялся на основе данных таблицы подраздела «Основные фонды» раздела официальной статистики на сайте Федеральной службы государственной статистики.

Данные из исходной таблицы наличия основных фондов в Российской Федерации на конец отчетного года по полной учетной стоимости, млн руб. (до 1998 г. – млрд руб.) в текущих ценах с сайта Росстата последовательно делились (после 2008 г. умножались) на дефлятор, и таким образом была вычислена величина капитала в постоянных ценах 2008 г.

Отметим, что из-за происходившей в 1990-е годы гиперинфляции, а также из-за бессистемных переоценок основных фондов объективная оценка величины  $K$  затруднительна (Воскобойников, Дрябина, 2010). О специальной методологии расчета стоимости основных фондов пишется в (Гордонов, 1998), но и она не дает гарантий надежных оценок.

#### 4. Проверка гипотезы о характере отдачи от факторов производства

В этом разделе будет описана методология оценки применимости моделей вида (2–3) к описанию эмпирических данных и оценки характера отдачи от факторов производства, а также приведены результаты соответствующих расчетов.

##### 4.1. Линеаризация модели

Табл. 1 содержит все данные, использованные для проверки применимости моделей (2–3), вычисления их коэффициентов и проверки характера отдачи от факторов производства (в предположении гипотезы  $A = \text{const}$ ).

Простым методом вычисления значений коэффициентов, при которых производственные функции (2–3) наилучшим образом аппроксимируют эмпирические данные, а также точности модели и коэффициентов, является линейная регрессия посредством метода наименьших квадратов. Поэтому используемые нами варианты производственной функции (2–3) приводятся к пригодной для применения этого метода вычислений форме посредством взятия натуральных логарифмов от всех переменных (тогда модель приобретает линейный вид). В результате получаем для функций вида (2–3) соответственно следующие уравнения:

$$\text{Ln}Y = \text{Ln}A + \alpha \text{Ln}K + \beta \text{Ln}L + \gamma \text{Ln}P + \zeta t, \quad (4)$$

$$\text{Ln}y = \text{Ln}A + \alpha \text{Ln}k + \gamma \text{Ln}p + \zeta t, \quad (5)$$

к исследованию которых применима обычная линейная регрессия.

Расчеты для разных случаев проводились в соответствии с формулами (4–5), включая или исключая влияние динамики цен на нефть и временной тренд. Также варьировались анализируемые периоды, поскольку в России экономическое развитие в 1999–2010 гг. было в целом более стабильным, чем в 1995–1998 гг. (хотя мировой кризис 2008 г. отразился и на России), а нас интересовало, насколько влияют на результат кризисные явления. В итоге было реализовано 16 альтернативных вариантов расчетов, результаты которых сгруппированы в четырех приведенных ниже таблицах.

В табл. 2–5 показаны следующие величины:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$  – коэффициенты уравнений (2–3), при которых соответствующий вариант функции (4–5) наиболее точно аппроксимирует данные посредством метода наименьших квадратов. Все величины приведены с точностью до 2-го знака после запятой, кроме  $p$ , значения которого приведены до шестого знака (так как эта величина в некоторых случаях достаточно мала). Значения коэффициента  $A$  в таблицах не приводятся, поскольку его величина в каждом случае зависит от единиц измерений, размерность зависит от выбора модели и не влияет на выводы статьи.

$R^2$  – коэффициент детерминации, характеризующий долю дисперсии зависимой переменной, объясняемую рассматриваемой моделью. Считается, что регрессионная модель должна объяснять не менее 80% вариации зависимой переменной, то есть модель регрессии успешна, когда  $R^2 > 0,8$  (Дрейпер, Смит, 1986).

Скорректированный  $R^2$  используется для того, чтобы была возможность сравнивать модели с разным числом факторов так, чтобы их число меньше влияло на статистику. Это важно, поскольку значение  $R^2$  увеличивается (не уменьшается) от добавления в модель новых переменных, даже если эти переменные не имеют отношения к объясняемой.

$p$  – величина, называемая уровнем значимости для F-критерия; используется для проверки гипотезы о значимости уравнения регрессии. Малые значения  $p$  показывают, что

гипотезу об отсутствии линейной зависимости между переменными следует отклонить. Часто  $p$  сравнивается с уровнем значимости 0,05. Мы принимаем этот вариант.

Для каждого из коэффициентов регрессии также вычисляется свой собственный уровень значимости. Эти коэффициенты также принято считать значимыми при значениях этих уровней меньше 0,05.

#### 4.2. Проверка гипотезы о постоянной отдаче факторов производства

В таблицах 2–3 приводятся данные расчетов, когда априори предполагается выполненным условие постоянной отдачи факторов производства, т. е.  $\beta = 1 - \alpha$ , а следовательно, справедлива формула (3), поэтому она используется для вычисления коэффициентов уравнения регрессии.

Все величины, соответствующие принятию гипотезы о значимости модели (по описанным в предыдущем подразделе критериям), а также значимые коэффициенты регрессии здесь и далее выделены в таблицах жирным шрифтом.

Таблица 2. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с постоянной отдачей и без временного тренда

| Исследуемые периоды | $\alpha$          | $\gamma$         | $R^2$       | $R^2$ скорректированный | Уровень значимости $p$ |
|---------------------|-------------------|------------------|-------------|-------------------------|------------------------|
| 1995–2010           | –0,24±0,47        | 0                | 0,08        | 0,01                    | 0,294461               |
| 1999–2010           | <b>1,23 ±0,44</b> | 0                | 0,79        | 0,77                    | <b>0,0001</b>          |
| 1995–2010           | –0,07±0,11        | <b>0,33±0,04</b> | <b>0,96</b> | <b>0,95</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1999–2010           | 0,29±0,39         | <b>0,26±0,09</b> | <b>0,96</b> | <b>0,95</b>             | <b>0,000000</b>        |

Приведенные в табл. 2 значения показывают, что варианты, где влияние динамики мировых цен на нефть не учитывается, демонстрируют малый коэффициент детерминации. Это означает, что модель фактически не применима, хотя результат во второй строке табл. 2 близок к значимому. При этом, для случаев с включением  $PY$ , оказываются незначимыми коэффициенты, характеризующие вклад труда и капитала.

Данные табл. 3 показывают, что, хотя включение временного тренда приводит во всех рассмотренных случаях к высоким значениям  $R^2$ , коэффициенты, характеризующие вклад труда и капитала, не значимы. Тем не менее, модель с учетом мировых цен на нефть и без тренда по значению  $R^2$  немного точнее, чем модель с трендом, но без учета этих цен.

Таблица 3. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с постоянной отдачей и с временным трендом

| Исследуемые периоды | $\alpha$   | $\gamma$  | $\zeta$    | $R^2$ | $R^2$ скорректированный | Уровень значимости $p$ |
|---------------------|------------|-----------|------------|-------|-------------------------|------------------------|
| 1995–2010           | 0,015±0,1  | 0         | 0,045±0,00 | 0,95  | 0,94                    | 0,000000               |
| 1999–2010           | –0,24±0,65 | 0         | 0,058±0,02 | 0,95  | 0,94                    | 0,000001               |
| 1995–2010           | –0,02±0,07 | 0,18±0,07 | 0,02±0,01  | 0,98  | 0,98                    | 0,000000               |
| 1999–2010           | –0,11±0,46 | 0,16±0,11 | 0,03±0,025 | 0,98  | 0,97                    | 0,000000               |

Общий вывод состоит в том, что все рассмотренные варианты модели с постоянной отдачей демонстрируют свою неприменимость для экономики России за рассматриваемые периоды. Поэтому гипотезу о постоянной отдаче труда и капитала (основных фондов) в российской экономике за рассматриваемый период предполагается отклонить.

#### 4.3. *Случаи модели с переменной отдачей факторов производства*

Поскольку мы отказываемся от условия постоянной отдачи, то можно рассмотреть  $\alpha$  и  $\beta$  как независимые коэффициенты и проверить, модель с какой отдачей по труду и капиталу является оптимальной. Случаи, приведенные в табл. 4, 5, соответствуют случаям из табл. 2, 3, но при этом гипотеза о постоянстве отдачи априори не принимается.

Табл. 4 показывает, что в предположении произвольных  $\alpha$  и  $\beta$  расчеты демонстрируют высокую точность модели, особенно в период относительно стабильного развития экономики России в 1999–2010 гг. Однако случай, приведенный

Таблица 4. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с произвольной отдачей и без временного тренда

| Исследуемые периоды | $\alpha$         | $\beta$                           | $\gamma$                         | $R^2$       | $R^2$ скорректированный | Уровень значимости $p$ |
|---------------------|------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------------|-------------------------|------------------------|
| 1995–2010           | $-0,19 \pm 0,21$ | <b><math>9,9 \pm 2,49</math></b>  | 0                                | <b>0,85</b> | <b>0,83</b>             | <b>0,000004</b>        |
| 1999–2010           | $0,18 \pm 0,28$  | <b><math>8,4 \pm 1,97</math></b>  | 0                                | <b>0,99</b> | <b>0,98</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1995–2010           | $-0,08 \pm 0,12$ | $1,93 \pm 3,19$                   | <b><math>0,3 \pm 0,11</math></b> | <b>0,96</b> | <b>0,95</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1999–2010           | $0,13 \pm 0,22$  | <b><math>6,13 \pm 2,47</math></b> | <b><math>0,1 \pm 0,09</math></b> | <b>0,99</b> | <b>0,99</b>             | <b>0,000000</b>        |

в 3-й строке табл. 4 за период 1995–2010 гг. выделяется тем, что там влияние динамики цен на нефть на ВВП значимо, а влияния труда и капитала на динамику ВВП незначимы.

Большие значения коэффициента  $\beta$  везде, кроме периода 1995–2010 гг. в 3-й строке, означают, что имеет место высокая отдача по труду и за счет этого – возрастающая суммарная отдача факторов производства по экономике в целом. Заметим, что для значимых случаев  $\beta$  даже нижняя граница доверительного интервала не только положительна, но и больше единицы.

При этом влияние капитала, определяемое коэффициентом  $\alpha$ , во всех случаях незначимо.

Таблица 5. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с произвольной отдачей и с временным трендом

| Исследуемые периоды | $\alpha$         | $\beta$                           | $\gamma$                          | $\zeta$                            | $R^2$       | $R^2$ скорректированный | Уровень значимости $p$ |
|---------------------|------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------|-------------------------|------------------------|
| 1995–2010           | $-0,04 \pm 0,05$ | <b><math>4,47 \pm 0,98</math></b> | 0                                 | <b><math>0,03 \pm 0,00</math></b>  | <b>0,99</b> | <b>0,99</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1999–2010           | $-0,138 \pm 0,2$ | <b><math>6,54 \pm 1,45</math></b> | 0                                 | <b><math>0,024 \pm 0,01</math></b> | <b>0,99</b> | <b>0,99</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1995–2010           | $-0,04 \pm 0,05$ | <b><math>3,48 \pm 1,32</math></b> | <b><math>0,07 \pm 0,07</math></b> | <b><math>0,026 \pm 0,01</math></b> | <b>0,99</b> | <b>0,99</b>             | <b>0,000000</b>        |
| 1999–2010           | $-0,11 \pm 0,16$ | <b><math>5,47 \pm 1,29</math></b> | <b><math>0,06 \pm 0,04</math></b> | <b><math>0,02 \pm 0,01</math></b>  | <b>0,99</b> | <b>0,99</b>             | <b>0,000000</b>        |

В табл. 5 значения коэффициентов детерминации особенно высоки (даже скорректированный  $R^2$  везде больше 0,99). Представленный в табл. 5 вариант расчетов включает наибольшее число членов для уравнений регрессии. Это само по себе дает возможности для более точной аппроксима-

ции. Однако значения скорректированного  $R^2$  также велики. Устойчиво значим и велик коэффициент  $\beta$  (даже нижняя граница его доверительного интервала больше единицы). Коэффициент  $\alpha$  везде незначим. Остальные коэффициенты значимы для обоих исследуемых периодов.

Общие выводы проведенных расчетов состоят в следующем. Во-первых, исследованные нами случаи использования моделей с постоянной отдачей следует признать неудачными для рассматриваемых временных диапазонов. Во-вторых, при переменной отдаче мы имеем различные альтернативные варианты моделей с высоким значением  $R^2$ , то есть в равной мере адекватных динамике исследуемых эмпирических данных. Это создает трудности в выборе «истинного» варианта модели отдачи факторов производства в российской экономике и требует привлечения дополнительных аргументов. В-третьих, если ориентироваться на максимально точную модель, а также на модели приемлемой точности с наименьшим числом параметров, то можно видеть, что отдача по труду везде возрастающая (хотя велик разброс значений  $\beta$ ). Что же касается динамики основного капитала (основных фондов) в российской экономике за период 1995–2010 гг. (коэффициент  $\alpha$ ), то он значительно отличается от нуля лишь в одном из рассмотренных случаев. Это означает, что рост основного капитала не приводит закономерно к соответствующему росту ВВП. В-четвертых, введение временного тренда не является, видимо, важным для модели с переменной отдачей, поскольку и без него значения  $R^2$  велики, тем не менее, оно улучшает точность. В-пятых, не следует переоценивать, на наш взгляд, влияние динамики цен на нефть на уровень отдачи используемых в российской экономике факторов производства. Введение влияния изменения цен на нефть в ряде случаев повышает коэффициент детерминации, но в двух случаях делает незначимыми коэффициенты, определяющие зависимость ВВП от труда и капитала. Учет при расчетах кризисного периода российской экономики в 1995–1998 гг. в некоторых случаях



несколько ухудшал точность аппроксимации, однако даже в этом временном интервале оказалось возможным подобрать модели с высокой точностью аппроксимации.

## 5. Корреляционные матрицы и графики

Результаты предыдущих пунктов для более полной и наглядной картины того, как величины связаны между собой, стоит дополнить приведением корреляционных матриц между переменными и графиков зависимости переменных от времени.

Корреляционные матрицы мы покажем в двух таблицах.

Таблица 6. Корреляционные матрицы показателей Российской экономики по данным за 1995–2010 гг.

|      | Ln Y        | Ln K  | Ln L        | Ln P        | t           |
|------|-------------|-------|-------------|-------------|-------------|
| Ln Y | 1,00        | –0,19 | <b>0,90</b> | <b>0,98</b> | <b>0,96</b> |
| Ln K | –0,19       | 1,00  | 0,01        | –0,13       | –0,24       |
| Ln L | <b>0,90</b> | 0,01  | 1,00        | <b>0,90</b> | <b>0,77</b> |
| Ln P | <b>0,98</b> | –0,13 | <b>0,90</b> | 1,00        | <b>0,93</b> |
| t    | <b>0,96</b> | –0,24 | <b>0,77</b> | <b>0,93</b> | 1,00        |

Таблица 7. Корреляционные матрицы показателей Российской экономики по данным за 1999–2010 гг.

|      | Ln Y        | Ln K        | Ln L        | Ln P        | t           |
|------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Ln Y | 1,00        | <b>0,92</b> | <b>0,99</b> | <b>0,97</b> | <b>0,97</b> |
| Ln K | <b>0,92</b> | 1,00        | <b>0,90</b> | <b>0,88</b> | <b>0,95</b> |
| Ln L | <b>0,99</b> | <b>0,90</b> | 1,00        | <b>0,96</b> | <b>0,94</b> |
| Ln P | <b>0,97</b> | <b>0,88</b> | <b>0,96</b> | 1,00        | <b>0,94</b> |
| t    | <b>0,97</b> | <b>0,95</b> | <b>0,94</b> | <b>0,94</b> | 1,00        |

Из таблиц видно, что логарифмы Y и P хорошо коррелируют со временем t весь период, для L, и особенно для K, коэффициент корреляции существенно возрастает для данных за 1999–2010 гг.

Высокие значения коэффициентов корреляции указывают на наличие частичной мультиколлинеарности между исследуемыми экономическими показателями (когда между ними существует с высокой точностью линейная зависимость). Это явление ухудшает точность расчетов коэффициентов модели. Однако в нашем случае коэффициент  $\beta$  в основном является значимым.

Хорошая корреляция логарифмов величин с  $t$  фактически свидетельствует о хорошей точности аппроксимации зависимости самих величин от времени экспонентой. Это может свидетельствовать о возможной связи между качеством применимости формулы Кобба—Дугласа и характером изменения во времени входящих в нее величин. Ранее мы исследовали точность аппроксимации ВВП на душу населения стран мира экспонентой и получили высокие значения коэффициента детерминации для ряда стран (*Кирилюк и др.*, 2009). Другие макроэкономические величины также могут иметь при определенных условиях зависимость от времени, близкую к экспоненциальной. В таком случае, чем точнее аппроксимируются экспонентой другие величины, используемые в (2–3), тем труднее отделить вклад каждой из них в поведение зависимой переменной.

Теперь приведем графики зависимости переменных, используемых нами при аппроксимации, от времени (рис. 1–4).

На рис. 1 хорошо видно падение ВВП вследствие кризиса 90-х гг. и последовавший за ним восходящий тренд в Российской экономике, прервавшийся на короткое время в связи с мировым кризисом 2008 г.

Функция  $K$  (рис. 2) демонстрирует более случайный характер динамики.

Функция  $P$  (рис. 4) демонстрирует четко выраженный положительный тренд с некоторыми колебаниями. Из графика видно, что мировой кризис 2008 г. отразился и на ценах на нефть.

Поведение функции  $L$  (рис. 3) во многом сходно с поведением  $Y$ , демонстрируя спад в периоды кризисов и рост между ними.

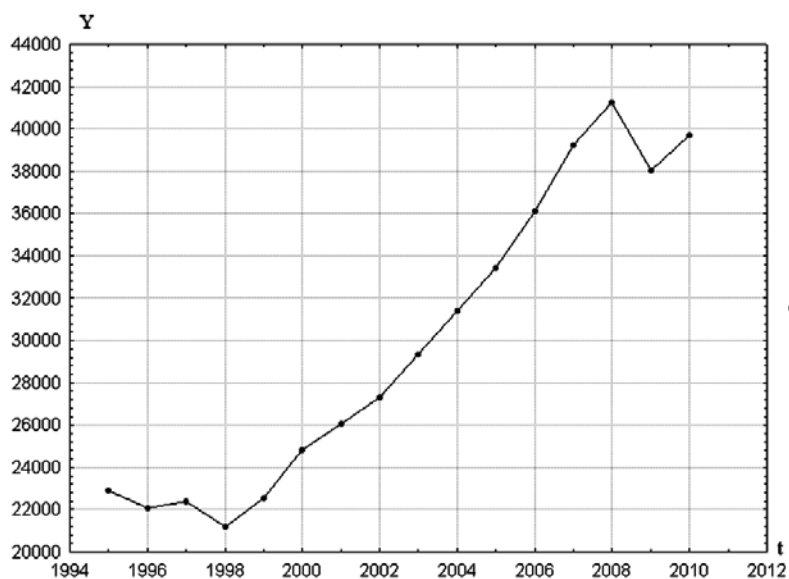


Рис. 1. Зависимость от времени функции  $Y$  (ВВП России в постоянных ценах 2008 г., млрд руб.)

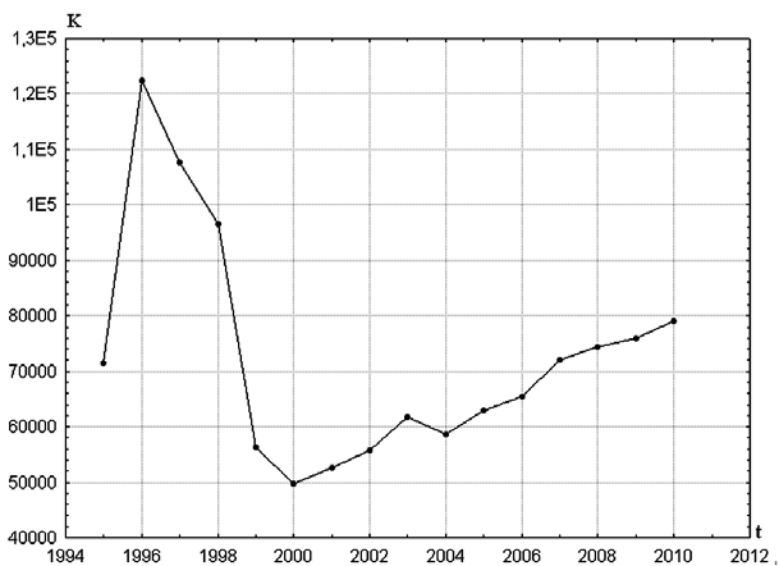


Рис. 2. Зависимость от времени функции  $K$  (Основные фонды РФ в постоянных ценах 2008 г., млн руб.)

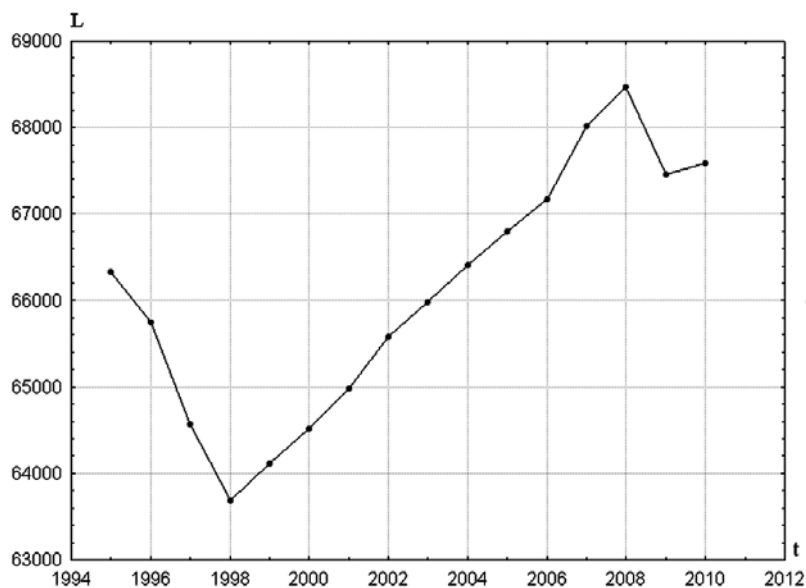


Рис. 3. Зависимость от времени функции L (численность занятых РФ, тыс. чел.)



Рис. 4. Зависимость от времени функции P (Цена на нефть Urals, долл/барр)

## 6. Сопоставление результатов статьи с результатами предыдущих исследований

Возможностям моделирования экономики России и стран СНГ с помощью функций Кобба–Дугласа посвящены, например, перечисленные ниже публикации.

В работе (Копотева, Черный, 2011) с использованием данных Федеральной службы государственной статистики (Росстата) за 2000–2008 гг. вычислены коэффициенты функций вида (3), без учета цен на нефть, то есть предполагалась постоянная отдача от факторов производства, как с использованием, так и без использования экспоненциального временного тренда. Эти модели сравнивались с другой моделью, связанной с применением одномерных временных рядов. В качестве  $Y$  авторами использовались поквартальные данные. Во всех сравниваемых случаях была отмечена высокая точность аппроксимации. Однако в работе не акцентируется внимание на том, в текущих или постоянных ценах выражены величина основных фондов и ВВП, что затрудняет сравнение результатов с нашими.

В работе (Обчинникова, 2010) функция Кобба–Дугласа использована для оценки факторов экономического роста России на основе модели роста Солоу и данных за 1998–2007 гг. В этой работе оговаривается, что использованы ВВП и капитал в сопоставимых ценах. Также приведена таблица использованных данных, но без ссылки на их источник (причем приведенные значения аналогичных показателей несколько расходятся с использованными в нашем исследовании). Можно также предположить, что автором перепутаны рассчитанные коэффициенты функции Кобба–Дугласа. С учетом этого, коэффициент  $\alpha$  несколько выше, чем полученные в наших моделях значения, а  $\beta$  весьма близок к полученным нами значениям в соответствующей модели. В данной статье, в отличие от наших расчетов, не учитываются временной тренд и динамика мировых цен на нефть.

В работе (Буравлев, 2012) в модель Кобба—Дугласа вводится фактор, учитывающий мотивацию работников к труду через уровень оплаты труда. При этом предполагается постоянная отдача. Используются данные Росстата за 2000–2009 гг., представленные в виде таблицы. Очевидно, в работе при расчетах используются величины  $Y$  и  $K$  в текущих ценах. В этой же работе приведены расчеты для 7 видов экономической деятельности за 2001–2008 гг. Для всех видов  $R^2 > 0,8$ , однако использованная для отдельных отраслей формула отличалась от используемых в нашем исследовании. Автор работы не учитывал таких факторов, как переменная отдача, временной тренд и цены на нефть, но ввел в формулу дополнительный член, описывающий расходы на оплату труда работников. Хотя результаты расчетов дали высокие значения коэффициентов детерминации, однако использование величин в текущих ценах представляется не вполне корректным. Следует отметить, что и сам автор в конце статьи говорит, что необходимо модифицировать модель путем введения различных индексов инфляции.

В работе (Садوخина, 2003) функция Кобба—Дугласа использована при макроэкономической оценке эффективности национального производства стран СНГ в 1991–2001 гг. на основе данных статистических сборников Статкомитета СНГ и Госкомстата России. Таким образом, расчеты проводились для более раннего периода времени, чем исследуемый нами. Как сказано в этой статье, динамику показателя основных фондов в расчетах там заменяет динамика годового объема инвестиций в основной капитал. Такое приближение автор объясняет нехваткой данных для ряда стран СНГ.

В работе (Бессонов, 2004) в расчетах на основе данных Госкомстата годовой периодичности с 1990 по 2002 г. для отраслей российской экономики, а также экономики в целом использована следующая методология. Автор предполагает, что коэффициент  $A$  не является константой, и исследует его динамику с использованием формулы про-

изводственной функции. При этом значения  $\alpha$  и  $\beta$ , в отличие от наших расчетов, не вычисляются, а задаются, причем в предположении постоянной отдачи. При этих условиях автор определил следующие значения коэффициентов эластичности:  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 0,7$ . Различие использованных методологий, а также несовпадающие временные периоды затрудняют сопоставление полученных нами и Бессоновым результатов.

Приведем также информацию о некоторых публикациях, где есть результаты использования функции Кобба–Дугласа для исследования макроэкономики других стран СНГ.

В работе (Горидько, Нижегородцев, 2012) по анализу динамики показателей макросистемы Украины за 1995–2009 гг. в ценах 2001 г. в степенную производственную функцию как самостоятельный фактор включена информация. Причем рассматривалось два способа ее включения: один из них априори включает гипотезу об убывающей отдаче по отношению к информации, второй, наоборот, автоматически предполагает закон возрастающей отдачи. Особенностью этой работы является то, что в качестве  $L$  используется не численность занятых, а заработная плата лиц, работающих по найму. Также авторами рассматриваются варианты модели с временными лагами. Таким образом, их подход существенно отличается от нашего, что затрудняет сравнение полученных результатов. Итоговый вывод статьи заключается в том, что основное влияние на экономический рост Украины оказывают опережающие инвестиции в основной капитал и финансирование инноваций.

Исследования характера отдачи факторов производства на макроуровне проводились также, например, для таких стран, как Польша (за период с 1980 по 1999 г.) и Белоруссия (1971–1999 гг.) (Чубрик, 2002). Было показано, что для Белоруссии гипотеза о постоянной отдаче принимается, а для Польши отклоняется в пользу суммарной положительной отдачи. Производственная функция в этой статье оценивалась

при помощи модели с механизмом корректировки равновесия.

Особо следует отметить исследование, в котором, как и нами, была обнаружена сильно убывающая отдача от использования основных фондов (капитала) в экономике. Так, отрицательные значения эмпирически найденных коэффициентов  $\alpha$  в функции Кобба–Дугласа были получены в (Светуньков, Абдуллаев, 2010), где использовались данные о развитии Хорезмской области Узбекистана за 1997–2007 гг.

Итоговые сопоставительные данные рассмотренных исследований приведены в табл. 8.

Видно, что в тех работах, где приведены коэффициенты детерминации, имеет место  $R^2 > 0,9$ , что говорит о хорошем соответствии разработанных авторами моделей эмпирическим данным.

Несмотря на то, что фактически всеми авторами для Российской Федерации используются данные из одного источника — Федеральной службы государственной статистики, имеется проблема несовпадения данных за некоторые годы в разных документах, выпускаемых службой. К сожалению, не во всех работах даются конкретные ссылки на источник данных, что затрудняет непосредственное сопоставление.

Видно, что в большинстве рассмотренных работ, посвященных анализу экономики России, гипотеза о постоянной отдаче принимается априори. Однако в работе (Овчинникова, 2010), где используются данные по России, и отдача предполагается переменной, результаты сходны с нашими. В проведенном автором исследовании также выявлена положительная отдача по труду и в целом по экономике страны.

Отличительной особенностью нашей работы является то, что мы сравниваем разные варианты модели степенной производственной функции, с одновременным учетом разных факторов (временной тренд, влияние цен на нефть, переменная отдача, учет кризисных лет) на одинаковых данных.



Таблица 8. Сравнительные данные для некоторых статей, использующих функции Кобба—Дугласа для исследования макроэкономики стран СНГ

| Статья                         | Используемые годы                      | Используемые величины                                                                                                                          | Характер отдачи                                                                                                                                                                                                           | Страна                         |
|--------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (Копотева, Черный, 2011)       | 2000–2008                              | ВВП, численность занятых в экономике, стоимость основных производственных фондов, экспоненциальный временной тренд                             | Постоянная, без тренда<br>$\alpha = 1,269, \beta = -0,269,$<br>$R^2 = 0,9773$ , постоянная<br>с трендом $\zeta = 0,051,$<br>$\alpha = 0,0007, \beta = 0,9993,$<br>$R^2 = 0,9720$                                          | Российская Федерация           |
| (Обвинникова, 2010)            | 1998–2007                              | ВВП в сопоставимых ценах, численность занятых, среднегодовая стоимость основных фондов с учетом износа в сопоставимых ценах                    | Возрастающая (по труду и по экономике в целом),<br>$\alpha = 0,905, \beta = 8,864$                                                                                                                                        | Российская Федерация           |
| (Буравлев, 2012)               | 2000–2009                              | ВВП в текущих ценах, численность занятых в экономике, стоимость основных производственных фондов                                               | Постоянная, $\alpha = 1,32,$<br>$\beta = -0,32, R^2 = 0,987$                                                                                                                                                              | Российская Федерация           |
| (Садوخина, 2003)               | 1991–2001                              | Погодовые индексы роста валового внутреннего продукта (ВВП), объемов инвестиций в основной капитал и численности занятых в экономике стран СНГ | Постоянная, по России<br>$\alpha = 0,361, R^2 = 0,897$                                                                                                                                                                    | Страны СНГ                     |
| (Бессонов, 2004)               | 1990–2002                              | ВВП, основные фонды и численность занятых в экономике                                                                                          | Постоянная, $\alpha = 0,3, \beta = 0,7$<br>(вводятся априори)                                                                                                                                                             | Российская Федерация           |
| (Горидько, Нижегородцев, 2012) | 1995–2009                              | ВВП в ценах 2001г., инвестиции в основной капитал, заработная плата лиц, работающих по найму, расходы на инновации                             | Убывающая по труду и капиталу, с учетом фактора информации (расходов на инновации),<br>$\alpha = 0,013, \beta = 0,762,$<br>$R^2 = 0,911$                                                                                  | Украина                        |
| (Чубрик, 2002)                 | Польша, 1980–1999, Беларусь, 1971–1999 | ВВП в ценах 1985 г., основные фонды в ценах 1985 г., занятость                                                                                 | Польша: возрастающая по труду и капиталу, $\alpha = 1,09,$<br>$\beta = 1,53$ (при переменной отдаче), $\alpha = 0,65$ (в предположении постоянной отдачи), Беларусь: $\alpha = 0,74$ (в предположении постоянной отдачи), | Польша, Беларусь               |
| (Светуньков, Абдуллаев, 2010)  | 1997–2007                              | Инвестиции, валовой региональный продукт, основные фонды, численность занятых                                                                  | $\alpha = 4,0021, \beta = -3,0021$<br>(в предположении постоянной отдачи),<br>Возрастающая и по труду, и по капиталу, $\alpha = 2,17766,$<br>$\beta = 3,10876$ (при допущении переменной отдачи)                          | Хорезмская область Узбекистана |

## 7. Расчеты для отдельных отраслей экономики

Расчеты проводились с использованием соответствующих данных Федеральной службы государственной статистики за 2004–2010 гг., а также значений мировых цен на нефть и годового индекса — дефлятора валового накопления основного капитала, приведенных в табл. 1. Более узкий, чем для экономики в целом, временной диапазон используемых данных связан с тем, что изменения в классификации отраслей экономики (Общесоюзный классификатор отраслей народного хозяйства (ОКОНХ) был заменен на Общероссийский классификатор видов экономической деятельности (ОКВЭД)) затрудняют их согласование с данными за более ранние годы. Используемые отраслевые данные мы приведем в виде нескольких таблиц.

В качестве переменной  $Y$  использованы данные, приведенные в табл. 9.

Как написано в комментарии к данным, «Расхождения между ВВП в целом и суммой его компонентов, а также между компонентами ВВП и суммой входящих в них элементов, исчисленных в постоянных ценах, объясняются изменениями в структуре весов, используемых для исчисления отдельных звеньев индексов». Как видно, значения ВВП в последней строке табл. 9 совпадают с соответствующими значениями  $Y$  из табл. 1, немного отличаясь за 2009–2010 гг., что, видимо, обусловлено тем, что данные корректировались Росстатом.

Значения переменной  $K$  рассчитаны на основе данных табл. 10 посредством деления на индексы-дефляторы валового накопления основного капитала из табл. 1.

Значения переменной  $L$  приведены в табл. 11.

Неясным остается факт расхождения значений данных во второй строке табл. 11 «Всего по экономике» (которые взяты непосредственно из источников) и соответствующих значений суммы данных по отраслям. Комментариев в источниках по этому поводу не найдено. Однако эти расхождения не более 2% от самих значений, более того, однонаправлены

Таблица 9. Валовая добавленная стоимость по видам экономической деятельности и валовой внутренний продукт РФ в 2003—2010 гг. (в ценах 2008 г.), млн руб.

|                                                                                                                            | 2004       | 2005       | 2006       | 2007       | 2008       | 2009       | 2010       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство                                                                               | 1338058,7  | 1342583,8  | 1379100,6  | 1397265,6  | 1486574,6  | 1506063,3  | 1344269,0  |
| Рыболовство, рыбоводство                                                                                                   | 72437,6    | 64571,7    | 67151,3    | 66558,1    | 62686,4    | 66155,0    | 63550,9    |
| Добыча полезных ископаемых                                                                                                 | 3374123,3  | 3425476,5  | 3325632,4  | 3253524,2  | 3284626,2  | 3300080,5  | 3455870,3  |
| Обрабатывающие производства                                                                                                | 5262310,5  | 5495811,3  | 5856999,9  | 6297585,6  | 6163935,8  | 5244865,8  | 5891726,0  |
| Производство и распределение электроэнергии, газа и воды                                                                   | 1008104,6  | 1016947,8  | 1063015,6  | 1026493,0  | 1033967,4  | 982648,9   | 1036936,2  |
| Строительство                                                                                                              | 1426395,0  | 1572077,8  | 1772852,3  | 2003466,5  | 2225325,3  | 1900888,8  | 1887525,7  |
| Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | 4669444,4  | 5096362,1  | 5815676,7  | 6496925,9  | 7137727,6  | 6698155,3  | 7035256,2  |
| Гостиницы и рестораны                                                                                                      | 242806,2   | 265326,1   | 286247,6   | 325272,1   | 357969,4   | 304464,6   | 311313,5   |
| Транспорт и связь                                                                                                          | 2540868,5  | 2691261,1  | 2952955,7  | 3096006,5  | 3258280,4  | 2982764,3  | 3211138,4  |
| Финансовая деятельность                                                                                                    | 647810,8   | 837102,8   | 1049382,6  | 1354491,7  | 1537849,7  | 1571874,6  | 1534534,5  |
| Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг                                                            | 2399935,4  | 2687734,4  | 2957847,3  | 3571740,1  | 3959385,1  | 3674523,4  | 3632195,7  |
| Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование                                      | 1817371,2  | 1719378,5  | 1761930,2  | 1830055,0  | 1884401,2  | 1904369,8  | 1978556,5  |
| Образование                                                                                                                | 953351,8   | 956388,1   | 961023,5   | 971468,9   | 970664,4   | 957267,7   | 939523,2   |
| Здравоохранение и предоставление социальных услуг                                                                          | 1137666,2  | 1156645,5  | 1173297,5  | 1186714,0  | 1197843,0  | 1195342,6  | 1210666,2  |
| Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг                                                        | 510342,0   | 524905,8   | 564465,8   | 612788,5   | 621461,7   | 500333,4   | 472751,3   |
| Итого в основных ценах                                                                                                     | 26952745,7 | 28567810,6 | 30835383,3 | 33438285,6 | 35182698,3 | 32789798,0 | 33925275,5 |
| Налоги на продукты                                                                                                         | 4740840,5  | 5071569,2  | 5515441,0  | 6016192,6  | 6323848,4  | 5477555,9  | 5894424,7  |
| Субсидии на продукты                                                                                                       | 272710,7   | 226349,8   | 215032,3   | 234385,3   | 229697,6   | 215915,7   | 217643,0   |
| Валовой внутренний продукт в рыночных ценах                                                                                | 31407836,6 | 33410459,0 | 36134558,0 | 39218671,5 | 41276849,2 | 38051438,2 | 39586539,3 |

Источник: (Росстат, 2012).

Таблица 10. Наличие основных фондов в Российской Федерации по видам экономической деятельности по полной учетной стоимости на конец года, млн руб.

| Показатель                                                                                                                 | 2004     | 2005     | 2006     | 2007     | 2008     | 2009     | 2010     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Всего                                                                                                                      | 34873724 | 41493568 | 47489498 | 60391454 | 74441095 | 82302969 | 93185612 |
| В том числе по видам экономической деятельности:                                                                           |          |          |          |          |          |          |          |
| сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство                                                                               | 1395777  | 1440084  | 1574699  | 1963327  | 2259571  | 2566917  | 2859877  |
| рыболовство, рыболовство                                                                                                   | 56675    | 55139    | 59975    | 79318    | 91247    | 97356    | 113107   |
| добыча полезных ископаемых                                                                                                 | 2618033  | 3310147  | 4081090  | 4976884  | 6365455  | 7861116  | 9084573  |
| обрабатывающие производства                                                                                                | 3196017  | 3639399  | 4218012  | 5122523  | 6001523  | 6951720  | 7989040  |
| производство и распределение электроэнергии, газа и воды                                                                   | 3033503  | 3408329  | 3605984  | 4087407  | 4925292  | 5740995  | 6769064  |
| строительство                                                                                                              | 688936   | 604922   | 711286   | 992921   | 1220893  | 1391117  | 1499940  |
| оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | 618622   | 859421   | 1138375  | 1648977  | 2156539  | 2556150  | 3109800  |
| гостиницы и рестораны                                                                                                      | 244422   | 278036   | 298381   | 395761   | 443796   | 484662   | 535183   |
| транспорт и связь                                                                                                          | 9836464  | 13388808 | 15270817 | 17942233 | 21525544 | 23283486 | 25950327 |
| финансовая деятельность                                                                                                    | 372276   | 493588   | 679710   | 996344   | 1446253  | 1858026  | 2154362  |
| операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг                                                            | 8659798  | 9368932  | 10427578 | 13707183 | 18642465 | 19616695 | 21895792 |
| государственное управление и обеспечение военной безопасности; обязательное социальное обеспечение                         | 1061442  | 1237532  | 1612048  | 2853979  | 3260983  | 3538562  | 4253045  |
| образование                                                                                                                | 1210675  | 1278844  | 1410202  | 2337357  | 2468104  | 2534403  | 2700025  |
| здравоохранение и предоставление социальных услуг                                                                          | 940493   | 1023358  | 1154516  | 1639280  | 1833726  | 1965934  | 2175848  |
| предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг                                                        | 940591   | 1107029  | 1246825  | 1647960  | 1799704  | 1855830  | 2095629  |

Источник: (Росстат, 2012).

Таблица 11. Среднегодовая численность занятых в экономике РФ по видам экономической деятельности, тыс. человек

| Показатель                                                                                                                 | 2004  | 2005  | 2006  | 2007  | 2008  | 2009  | 2010  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Всего в экономике                                                                                                          | 66407 | 66792 | 67174 | 68019 | 68474 | 67463 | 67577 |
| В том числе по видам экономической деятельности:                                                                           |       |       |       |       |       |       |       |
| сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство                                                                               | 7430  | 7381  | 7141  | 6925  | 6675  | 6733  | 6656  |
| рыбоводство, рыболовство                                                                                                   | 113   | 138   | 146   | 145   | 142   | 146   | 143   |
| добыча полезных ископаемых                                                                                                 | 1088  | 1051  | 1043  | 1040  | 1044  | 1067  | 1057  |
| обрабатывающие производства                                                                                                | 11787 | 11506 | 11359 | 11368 | 11191 | 10401 | 10292 |
| производство и распределение электроэнергии, газа и воды                                                                   | 1900  | 1912  | 1923  | 1909  | 1884  | 1929  | 1945  |
| строительство                                                                                                              | 4743  | 4916  | 5073  | 5274  | 5474  | 5315  | 5380  |
| оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | 10843 | 11088 | 11317 | 11713 | 12020 | 11943 | 12057 |
| гостиницы и рестораны                                                                                                      | 1152  | 1163  | 1185  | 1260  | 1274  | 1142  | 1183  |
| транспорт и связь                                                                                                          | 5293  | 5369  | 5426  | 5450  | 5451  | 5307  | 5347  |
| финансовая деятельность                                                                                                    | 835   | 858   | 958   | 1046  | 1132  | 1091  | 1122  |
| операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг                                                            | 4825  | 4879  | 4957  | 5004  | 5146  | 5315  | 5380  |
| из них научные исследования и разработки                                                                                   | 1165  | 988   | 954   | 905   | 855   | 947   | 904   |
| государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование                                      | 3447  | 3458  | 3504  | 3618  | 3727  | 3876  | 3905  |
| образование                                                                                                                | 6125  | 6039  | 6009  | 6016  | 5980  | 5979  | 5902  |
| здравоохранение и предоставление социальных услуг                                                                          | 4488  | 4548  | 4574  | 4644  | 4666  | 4638  | 4621  |
| предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг                                                        | 2330  | 2460  | 2533  | 2573  | 2621  | 2526  | 2531  |

Источник: Российские статистические ежегодники 2010 и 2011 г., табл. 5.5 (доступны на: (Росстат, 2012)).

и имеют не слишком большой разброс по величине между собой, поэтому, в расчетах будем пользоваться данными второй строки табл. 11, совпадающей со вторым столбцом таблицы 1 по значениям за соответствующие годы.

Регрессионный анализ всех 15 отраслей показал следующие результаты:

1) отрасли «Добыча полезных ископаемых», «Производство и распределение электроэнергии, газа и воды» показывают низкие значения коэффициента детерминации  $R^2 < 0,8$  в любых вариантах модели;

2) отрасли «Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство», «Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование», «Здравоохранение и предоставление социальных услуг», «Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг» показывают  $R^2 > 0,8$  в некоторых случаях, но при этом ни в одном из вариантов модели незначимы коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ ;

3) для отрасли «Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг» есть варианты модели с  $R^2 > 0,8$ , либо со значимыми коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ , но нет варианта, где выполнены одновременно оба эти условия.

Поскольку нас интересует выявление характера отдачи от факторов производства, мы выпишем для дальнейшего анализа только те случаи, где одновременно  $R^2 > 0,8$ , и при этом значим хотя бы один из коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ . Из 120 комбинаций (8 вариантов модели для 15 отраслей) таким условиям удовлетворяют всего 20 случаев, которые мы приводим в таблице 12, где их можно сравнить также с данными для экономики в целом за соответствующий интервал времени и отобранными по тому же принципу.

Фактически, отбирая варианты только со значимыми коэффициентами, мы уменьшаем итоговый эффект мультиколлинеарности между переменными и повышаем достоверность выводов. Есть ряд других способов противодействия этому эффекту (Бородич, 2000 и др.), но для таких коротких рядов, как используемые нами, они могут оказаться ненадежными.

Отметим также, что мультиколлинеарность связана с одним из видов нарушения условий Гаусса—Маркова, выполнение которых определяет применимость модели линейной по параметрам регрессии.

Для случая с постоянной отдачей пишем  $\beta = 1 - \alpha$ , в тех вариантах, где не учитывается влияния нефти и тренда, стоят нулевые значения в соответствующих ячейках табл. 12.

Интересным фактом является то, что для каждой конкретной отрасли в табл. 12 оказались случаи только с постоянной или, наоборот, только с переменной отдачей. Очевидно, это связано с тем, что, с одной стороны, замена переменных, используемая в системе с постоянной отдачей (переход от формулы (2) к формуле (3)), может уменьшать роль мультиколлинеарности в модели и повышать точность вычисления коэффициентов. С другой стороны, для систем с переменной отдачей условие  $\alpha + \beta = 1$  не выполняется и наилучшие результаты получаются при значениях  $\alpha + \beta$ , заметно отличающихся от единицы.

Для всех случаев с переменной отдачей  $\beta > 1$  (хотя в единственном случае он незначим), что может служить аргументом в пользу того, что эти отрасли характеризуются положительной отдачей по труду. Более того, в десяти случаях нижняя граница доверительного интервала больше единицы. При этом коэффициент  $\alpha$  во многих случаях меньше единицы, есть даже одно значимое отрицательное значение. Факт отрицательности хотя и представляется парадоксальным, в некоторых ситуациях может быть обоснован тем, что производство является настолько неэффективным, что сколько бы ресурсов капитала в его нынешнем виде мы ни использовали, это не будет улучшать показатели выпуска продукции производства на его основе (Светушков, Абдуллаев, 2010).

Для отраслей «Рыболовство, рыбоводство», «Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования», «Финансовая деятельность» значимыми оказались некоторые варианты модели с постоянной отдачей (кроме

Таблица 12. Коэффициенты и точность аппроксимации формулой производственной функции данных для отраслей экономики

| Отрасль                                                                                                                    | $\alpha$         | $\beta$         | $\gamma$         | $\zeta$           | $R^2$    | $R^2$ скорректированный | Уровень значимости $p$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-------------------|----------|-------------------------|------------------------|
| Рыболовство, рыбоводство                                                                                                   | $0,57 \pm 0,36$  | $1 - \alpha$    | $-0,23 \pm 0,14$ | 0                 | 0,956258 | 0,934387                | 0,00191                |
| Рыболовство, рыбоводство                                                                                                   | $0,72 \pm 0,42$  | $1 - \alpha$    | 0                | $-0,03 \pm 0,02$  | 0,926162 | 0,889242                | 0,00545                |
| Рыболовство, рыбоводство                                                                                                   | $0,6 \pm 0,38$   | $1 - \alpha$    | $-0,16 \pm 0,22$ | $-0,012 \pm 0,03$ | 0,972772 | 0,945545                | 0,00756                |
| Обрабатывающие производства                                                                                                | $2,28 \pm 1,4$   | $3,34 \pm 2,2$  | 0                | 0                 | 0,834797 | 0,752195                | 0,02729                |
| Обрабатывающие производства                                                                                                | $1,41 \pm 0,98$  | $2,54 \pm 1,29$ | $0,14 \pm 0,1$   | 0                 | 0,975268 | 0,950537                | 0,00655                |
| Обрабатывающие производства                                                                                                | $1,31 \pm 2,35$  | $3,68 \pm 2,23$ | 0                | $0,045 \pm 0,09$  | 0,911507 | 0,823014                | 0,04348                |
| Обрабатывающие производства                                                                                                | $1,75 \pm 1,56$  | $1,82 \pm 2,69$ | $0,21 \pm 0,26$  | $-0,037 \pm 0,12$ | 0,987443 | 0,962329                | 0,02495                |
| Строительство                                                                                                              | $-0,15 \pm 0,53$ | $2,97 \pm 1,32$ | 0                | 0                 | 0,930103 | 0,895154                | 0,00488                |
| Строительство                                                                                                              | $0,027 \pm 0,19$ | $4,42 \pm 0,78$ | 0                | $-0,046 \pm 0,02$ | 0,995909 | 0,991818                | 0,00044                |
| Строительство                                                                                                              | $-0,04 \pm 0,37$ | $5,27 \pm 3,55$ | $-0,11 \pm 0,42$ | $-0,049 \pm 0,03$ | 0,997418 | 0,992255                | 0,00515                |
| Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | $0,4 \pm 0,13$   | $1 - \alpha$    | 0                | 0                 | 0,915256 | 0,898307                | 0,00073                |
| Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | $0,24 \pm 0,17$  | $1 - \alpha$    | $0,18 \pm 0,16$  | 0                 | 0,974666 | 0,961999                | 0,00064                |
| Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования | $0,8 \pm 0,76$   | $1 - \alpha$    | 0                | $-0,055 \pm 0,10$ | 0,945396 | 0,918094                | 0,00298                |
| Гостиницы и рестораны                                                                                                      | $-0,24 \pm 1,72$ | $2,05 \pm 1,49$ | 0                | $0,04 \pm 0,035$  | 0,952873 | 0,905746                | 0,01712                |



Окончание табл. 12

| Отрасль                 | $\alpha$         | $\beta$         | $\gamma$         | $\zeta$          | $R^2$    | $R^2$<br>скоррек-<br>тирован-<br>ный | Уровень<br>значи-<br>мости р |
|-------------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|----------|--------------------------------------|------------------------------|
| Транспорт и связь       | $-0,25 \pm 0,18$ | $4,82 \pm 0,90$ | 0                | $0,04 \pm 0,01$  | 0,998108 | 0,996216                             | 0,00014                      |
| Транспорт и связь       | $-0,25 \pm 0,29$ | $4,54 \pm 3,28$ | $0,017 \pm 0,18$ | $0,040 \pm 0,02$ | 0,998253 | 0,994758                             | 0,00349                      |
| Финансовая деятельность | $0,72 \pm 0,32$  | $1 - \alpha$    | 0                | 0                | 0,869388 | 0,843266                             | 0,00219                      |
| Финансовая деятельность | $0,48 \pm 0,40$  | $1 - \alpha$    | $0,29 \pm 0,36$  | 0                | 0,94192  | 0,91288                              | 0,00337                      |
| Финансовая деятельность | $2,07 \pm 1,87$  | $1 - \alpha$    | $0,39 \pm 0,28$  | $-0,23 \pm 0,27$ | 0,983406 | 0,966811                             | 0,00361                      |
| Образование             | $0,01 \pm 0,08$  | $1,55 \pm 1,43$ | $0,051 \pm 0,06$ | 0                | 0,838385 | 0,67677                              | 0,10478                      |
| Всего                   | $0,79 \pm 0,41$  | $1 - \alpha$    | 0                | 0                | 0,827705 | 0,793246                             | 0,00447                      |
| Всего                   | $0,40 \pm 0,23$  | $5,68 \pm 2,45$ | 0                | 0                | 0,986906 | 0,980359                             | 0,00017                      |
| Всего                   | $0,34 \pm 0,29$  | $4,19 \pm 4,34$ | $0,07 \pm 0,17$  | 0                | 0,991835 | 0,98367                              | 0,00124                      |
| Всего                   | $-0,07 \pm 2,1$  | $6,79 \pm 5,70$ | 0                | $0,02 \pm 0,09$  | 0,988872 | 0,977744                             | 0,00198                      |

единственного случая «Финансовая деятельность» с учетом тренда и цен на нефть, все значения коэффициентов лежат в диапазоне  $[0,1]$ . Интересно, что в большинстве случаев с постоянной отдачей  $\alpha > \beta$ .

Для отраслей «Гостиницы и рестораны», «Обрабатывающие производства», «Образование», «Строительство», «Транспорт и связь» значимыми оказались некоторые варианты модели с переменной отдачей. Во всех этих случаях выполняется условие  $\alpha < \beta$ , а также условие  $\beta > 1$ . Что же касается  $\alpha$ , то он значим для отрасли «Обрабатывающие производства»,  $\alpha > 1$  и для одного случая отрасли «Транспорт и связь»,  $\alpha < 0$ .

Как видим, при временном диапазоне, используемом в таблице 12, оказался значим даже вариант модели для всей экономики с постоянной отдачей, без учета тренда и мировых цен на нефть, что говорит о том, что в периоды экономической стабильности формула (1) все-таки может быть применима, хотя и менее точно, чем более сложные модели.

## Заключение

На примере различных вариантов модели степенной производственной функции показано, что экономика России может быть описана производственными функциями с высокими значениями коэффициентов детерминации. Модели, в которых априори не предполагалось постоянства отдачи факторов производства на макроуровне, как правило, демонстрируют возрастающую отдачу по труду (как в моделях без множителя в виде экспоненциального временного тренда, так и в моделях с учетом тренда). Эта же закономерность выявлена для ряда отдельных отраслей экономики в том случае, если для их описания подходит модель степенной производственной функции. Показано также, что применяемые модели в ряде случаев лучше подходят для описания экономики страны в целом, чем для описания большинства ее конкретных отраслей.

Тем не менее, следует признать, что большой разброс в значениях коэффициентов модели при разных вариантах расчетов, свидетельствующий о возможной мультиколлинеарности, тот факт, что для ряда моделей российской экономики в целом и ее отдельных отраслей получены низкие значения коэффициентов детерминации, а также остающаяся вероятность того, что регрессия где-то является ложной, ограничивает сферу применимости рассматриваемых моделей, особенно на коротких временных рядах эмпирических данных.

В дальнейших исследованиях мы собираемся провести сравнительный анализ результатов моделирования макроэкономических систем с помощью производственных функций вида (2–3) с результатами моделирования системами нелинейных дифференциальных уравнений, принципы которого описаны, например, в (Малков, Кирилук, 2009). Оценка параметров таких систем, наиболее соответствующих описанию реальных процессов, проводится посредством методов нелинейной регрессии. Для этого предполагается использовать дополнительные панельные данные, что может позволить получить более надежные результаты с проверкой выполнения условий Гаусса–Маркова и наличия коинтеграционных соотношений.

Автор выражает искреннюю благодарность С.Г. Кирдиной, С.Ю. Малкову, М.Ю. Романовскому, А.Н. Слуцкину, Т.Ю. Шаталовой, А.В. Шатрову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов В.А. О динамике совокупной факторной производительности в российской переходной экономике. М.: Институт экономики переходного периода, 2004.
2. Блауг М. Методология экономической науки, или Как экономисты объясняют. Пер. с англ. / Науч. ред. и вступ. ст. В.С. Автономова. М.: НП «Журнал “Вопросы экономики”», 2004.
3. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики: учебное пособие. Мн.: БГУ, 2000.

4. Брагинский О.Б. Цены на нефть: история, прогноз, влияние на экономику // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). 2008. Т. LII. № 6. С. 25–36.
5. Буравлев А.И. Трехфакторная производственная модель Кобба–Дугласа // Экономика и управление: проблемы, решения. 2012. № 3. С. 13–19.
6. Воскобойников И.Б., Дрябина Е.В. Историческая статистика основных фондов российской промышленности в 1970–2004 годах // Вопросы статистики. 2010. № 3. С. 28–45.
7. Гневашева В.А. Прогнозирование занятости с помощью функции Кобба–Дугласа // Научный журнал МосГУ: знание, понимание, умение. 2005. № 1. С. 117–122.
8. Гордонов М.Ю. О дальнейшем совершенствовании оценки и статистического учета основных фондов // Настольный аудитор бухгалтера: Прилож. к журн. Совр. бухучет. 1998. № 5. С. 13–19.
9. Горидько Н.П., Нижегородцев Р.М. Построение лаговых регрессионных моделей типа Кобба–Дугласа на долгосрочных временных горизонтах // Пробл. управл. 2012. № 3. С. 55–63.
10. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. М.: Финансы и статистика, 1986.
11. Дубовский С.В. Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов // Кондратьевские волны: аспекты и перспективы: ежегодник. М.: Учитель, 2012. С. 179–189.
12. Жилев К.В. Теоретические подходы к построению модели для оценки влияния мировых цен (цен экспорта) на российскую экономику // Научные труды ИНП РАН. 2004. Т. 2. С. 39–56.
13. Казакова М.В., Синельников-Мурылев С.Г. Конъюнктура мирового рынка энергоносителей и темпы экономического роста в России // Экономическая политика. 2009. № 5. С. 118–135.
14. Кирдина С.Г., Малков С.Ю. Два механизма самоорганизации экономики: модельная и эмпирическая верификация (научный доклад). М.: ИЭ РАН, 2010.
15. Кирилук И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С. Особенности долгосрочной экономической динамики мировой системы: анализ статистических данных // Прикладная эконометрика. 2009. №4(16). С. 34–45.
16. Копотева А.В., Черный С.А. Применение модели Кобба–Дугласа для построения сценария посткризисного развития экономики // Вопросы экономических наук. 2011. № 6. С. 31–35.
17. Ловянский Д.Г. Влияние роста мировых цен на нефть на российскую экономику // Материалы XI региональной научно-технической конференции «Вузовская наука – Северо-кавказскому региону». Том третий. Экономика. Ставрополь: СевКавГТУ, 2007.

18. Малков С.Ю., Кириллук И.А. Влияние особенностей производственных процессов на макроэкономическую устойчивость: базовая математическая модель // Стратегическая стабильность. 2009. № 4(49). С. 32–39.
19. Назруллаева Е.Ю. Моделирование влияния инвестиционных процессов в российской промышленности на структуру затрат по видам экономической деятельности в 2005–2009 гг. // Прикладная эконометрика. 2010. № 3. С. 38–61.
20. Овчинникова А.В. Оценка факторов экономического роста России // Вестник удмуртского университета, Серия 2: Экономика и право. 2010. Вып. 4. С. 52–56.
21. Подкорытова О.А., Алексеев А.Г., Чигвинцева Т.А. Долгосрочное влияние нефтяных цен на российскую экономику // Финансы и бизнес. 2011. № 3. С. 121–131.
22. Росстат, 2012. <http://www.gks.ru> (дата обращения: декабрь 2012).
23. Садыхина Е.Ю. Макроэкономическая оценка эффективности национального производства стран СНГ в 1991–2001 гг. Российская академия наук. Институт народнохозяйственного прогнозирования. М.: Макс-Пресс, 2003.
24. Светульников С.Г., Абдуллаев И.С. Сравнительный анализ производственных функций в моделях экономической динамики // Известия Санкт-петербургского университета экономики и финансов. 2010. №5. С. 55–66.
25. Синельников-Мурылев С.Г. Кадочников П.А., Казакова М.В. Анализ структурной и конъюнктурной составляющих налоговой нагрузки в российской экономике. Серия «Научные труды» № 129. М.: ИЭПП, 2009.
26. Чубрик А.С. Отдача от масштаба производственной функции и общеквадратная производительность: пример Польши и Белоруссии // ЭКОВЕСТ. 2002. Т. 2. № 2. С. 252–275.
27. Engle Robert F., Grange, Clive W.J. Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing // Econometrica 1987. Vol. 55. No 2. Pp. 251–276.
28. Robinson J. The Production Function and the Theory of Capital // Review of Economic Studies. 1953–1954. Vol. 21. No. 2. Pp. 81–106.
29. Top Oil News, 2012. <http://topoilnews.com> (дата обращения: август 2012).

### 3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РОССИЙСКИХ РЕГИОНОВ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ

*Кириллюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.*

Информационные технологии и вычислительные системы.

2021. № 1. С. 20–31.

DOI: 10.14357/20718632210103.

Исследована зависимость вычисленной на основе производственных функций эмерджентной характеристики — отдачи от масштаба производства в регионах Российской Федерации от различных показателей, характеризующих регионы, включая макроэкономические показатели, характеристики процессов экономического воспроизводства и социально-экономических институтов, географические показатели и т.д. Вычисления произведены с использованием метода оптимальных достоверных разбиений, подразумевающего верификацию закономерностей в данных с использованием перестановочных тестов. В результате анализа статистически значимая связь с отдачей была выявлена для значительной доли показателей или их сочетаний, что указывает как на реальное существование взаимозависимости указанных показателей с отдачей, так и на достаточную точность оценок параметров модели Кобба—Дугласа по участвующим в анализе временным рядам.

**Ключевые слова:** интеллектуальный анализ данных, оптимально достоверные разбиения, верификация закономерностей, перестановочные тесты, производственные функции, отдача от масштаба, региональная экономика, экономическое воспроизводство.

## INVESTIGATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN PRODUCTION FUNCTIONS AND SOCIO-ECONOMIC INDICATORS OF RUSSIAN REGIONS BY THE METHOD OF OPTIMAL PARTITIONING

The dependence of the emergent characteristic- returns to scale, calculated on the basis of production functions in the regions of the Russian Federation, on various indicators characterizing the regions, including macroeconomic indicators, characteristics of economic reproduction processes and socio-economic institutions, geographical indicators, etc. was investigated. The calculations were carried out using the method of optimal valid partitioning, which implies verification of patterns in the data using permutation tests. As a result of the analysis, a statistically significant relationship with returns to scale was revealed for a significant percentage of indicators or their combinations, which indicates both the real existence of the interdependence of these indicators with the returns to scale, and the sufficient accuracy of estimates of the parameters of the Cobb–Douglas model for the time series involved in the analysis.

**Keywords:** data mining, optimal valid partitioning, pattern verification, permutation tests, production functions, returns to scale, regional economics, economic reproduction.

### Введение

Феномен непостоянной отдачи от масштаба производства как характеристики производственных функций экономических систем разных уровней является предметом значительного интереса экономистов. В работе (*Cobb and Douglas, 1928*) введена простейшая модель производственных функций, сводящаяся к линейной зависимости выпускаемого продукта от факторов производства посредством логарифмирования переменных:

$$Y = A K^{\alpha} L^{\beta} \varepsilon, \quad (1)$$

где  $Y$  – «выпуск продукции»,  $K$  – «капитал»,  $L$  – «труд»,  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – вычисляемые параметры,  $\varepsilon$  – мультипликативный «шум».

В (1) отдача от масштаба производства характеризуется величиной  $\alpha+\beta$ . Если  $\alpha+\beta=1$ , говорят о постоянной отдаче о масштаба, если  $\alpha+\beta<1$  — об убывающей и если  $\alpha+\beta>1$  — о возрастающей. Если отдача не равна единице, нарушается аддитивность системы, то есть домножение труда и капитала на некоторый коэффициент приводит не к увеличению выпуска в такой же степени (к домножению на такую же величину), он меняется слабее или сильнее, что может быть интерпретировано как результат эмерджентных явлений в системе, определяемых, например, конкуренцией или кооперацией между подсистемами.

Рядом авторов, в том числе, в наших предыдущих расчетах для экономических систем уровня стран и регионов получены значения  $\alpha+\beta$ , существенно отличающиеся от единицы, причем как возрастающие, так и убывающие значения отдачи (Чубрик, 2002; Гафарова, 2013; Кирилюк, 2013; Kirilyuk and Senko, 2019). Однако при вычислениях производственных функций по временным рядам показателей выражен такой фактор, как мультиколлинеарность, осложняющая объективную оценку коэффициентов регрессии, приводящая к существенному увеличению дисперсии в их значениях при построении производственных функций по панелям данных (таким как панель регионов Российской Федерации). При этом значимое смещение среднего значения по панелям относительно единицы может говорить об объективности выявленного непостоянного характера отдачи. Также представляет интерес установление значимости, закономерности различий  $\alpha+\beta$  для разных регионов.

В (Kirilyuk and Senko, 2019) показана возможность оценки достоверности эффекта непостоянной отдачи методами интеллектуального анализа данных. Если непостоянство отдачи не является артефактом, обусловленным эффектами типа мультиколлинеарности, это может иметь важное экономическое значение, а следовательно, отдача может значимо зависеть от совокупности других экономических показателей.



## Объект исследований

Объектом настоящего исследования являются 79 регионов Российской Федерации, напрямую (а не как часть более крупных регионов) входящие в состав России, для которых доступны наборы необходимых для расчетов отдачи временных рядов достаточной длины (то есть за исключением Крыма, Севастополя, Чечни).

Данные брались из сборников Росстата (*Регионы России...*, 2014; 2017; *Российский статистический...*, 2015) за 2014 г. Отдача рассчитывалась по временным рядам за 1996–2014 гг., использовавшимся в предыдущих работах (*Kirilyuk and Senko*, 2019; *Кирилук и Сенько*, 2020). В качестве переменных в (1) использованы следующие показатели:  $Y$  — валовой региональный продукт, вместо капитала  $K$  здесь используются инвестиции в основной капитал (в литературе инвестиции обозначаются буквой  $I$ ),  $L$  — среднегодовая численность занятых в экономике, помноженная на среднемесячную номинальную начисленную заработную плату работающих в экономике. Приведение величин к постоянным ценам, для используемого набора показателей имеющее значение в случае непостоянной отдачи, осуществлялось с использованием индексов потребительских цен. Использование инвестиций вместо капитала в качестве фактора производства в производственных функциях обсуждается, например, в (*Гребнев*, 2015).

Для исследуемых данных были рассчитаны производственные функции по формуле (1), определена их отдача для каждого из регионов, определена медиана отдачи по совокупности регионов и в зависимости от соотношений отдачи конкретного региона с медианным (больше или меньше) регионы разделены на две группы.

Далее выяснялась связь отдачи со следующим набором показателей, характеризующих условия экономического воспроизводства в исследуемых регионах (по состоянию на 2014 г.):  $v_1$  — площадь территории, тыс. км<sup>2</sup>;  $v_2$  — численность населения на 1 января 2014 г., тыс. человек;  $v_3$  — среднегодо-

вая численность занятых в экономике, тыс. человек;  $v_4$  — среднедушевые денежные доходы (в месяц), руб.;  $v_5$  — потребительские расходы в среднем на душу населения (в месяц), руб.;  $v_6$  — среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций, руб.;  $v_7$  — основные фонды в экономике (по полной учетной стоимости; на конец года), млн руб.;  $v_8$  — удельный вес городского и сельского населения в общей численности населения (оценка на конец года; в %);  $v_9$  — коэффициенты миграционного прироста на 10000 человек населения;  $v_{10}$  — ожидаемая продолжительность жизни при рождении (число лет);  $v_{11}$  — уровень безработицы (в %);  $v_{12}$  — общая площадь жилых помещений, приходящаяся в среднем на одного жителя (на конец года; кв. м);  $v_{13}$  — выпуск квалифицированных рабочих и служащих на 10 000 человек занятого населения, человек;  $v_{14}$  — заболеваемость на 1000 человек населения (зарегистрировано заболеваний у пациентов с диагнозом, установленным впервые в жизни);  $v_{15}$  — численность зрителей театров на 1000 человек населения;  $v_{16}$  — число посещений музеев, человек на 1000 человек населения;  $v_{17}$  — число зарегистрированных преступлений на 100 000 человек населения;  $v_{18}$  — валовой региональный продукт (млн руб.);  $v_{19}$  — валовой региональный продукт на душу населения (руб.),  $v_{20}$  — индекс физического объема валового регионального продукта (в постоянных ценах; в процентах к предыдущему году);  $v_{21}$  — фактическое конечное потребление домашних хозяйств на душу населения на территории субъектов Российской Федерации (в текущих рыночных ценах; руб.);  $v_{22}$  — валовое накопление основного капитала (в текущих рыночных ценах; млн руб.);  $v_{23}$  — стоимость основных фондов (на конец года; по полной учетной стоимости; млн руб.),  $v_{24}$  — степень износа основных фондов (на конец года; в %),  $v_{25}$  — инвестиции в основной капитал (в фактически действовавших ценах; миллионов рублей);  $v_{26}$  — инвестиции в основной капитал на душу населения (в фактически действовавших ценах; руб.);  $v_{27}$  — индекс физического объема инвестиций в основной капитал (в сопо-

ставимых ценах; в % к предыдущему году); v28 — индексы промышленного производства (в процентах к предыдущему году); v29 — оборот розничной торговли (в фактически действовавших ценах; миллионов рублей); v30 — оборот розничной торговли на душу населения (в фактически действовавших ценах; руб.); v31 — плотность автомобильных дорог общего пользования с твердым покрытием (на конец года; км путей на 1000 км<sup>2</sup> территории); v32 — число дорожно-транспортных происшествий на 100 000 человек населения; (раз) v33 — число персональных компьютеров на 100 работников (шт.); v34 — использование сети интернет населением (по данным выборочного обследования населения; в % от общей численности населения в возрасте 15–72 лет соответствующего субъекта Российской Федерации); v35 — численность персонала, занятого научными исследованиями и разработками (человек); v36 — инновационная активность организаций (удельный вес организаций, осуществлявших технологические, организационные, маркетинговые инновации, в общем числе обследованных организаций, в %); v37 — затраты на технологические инновации (млн руб.); v38 — объем инновационных товаров, работ, услуг, млн руб.; v39 — доходы консолидированных бюджетов субъектов Российской Федерации в 2014 г. (млн руб.); v40 — расходы консолидированных бюджетов субъектов Российской Федерации в 2014 г. (млн руб.); v41 — вклады (депозиты) юридических и физических лиц в рублях, привлеченные кредитными организациями (исходя из места привлечения средств; на начало года; млн руб.); v42 — сальдированный финансовый результат (прибыль минус убыток) деятельности организаций (млн руб.); v43 — индексы потребительских цен (декабрь к декабрю предыдущего года; в %); v44 — среднегодовая численность занятых (тыс. человек); v45 — величина прожиточного минимума, установленная в субъектах Российской Федерации за IV квартал 2014 г. (в среднем на душу населения), руб. в месяц; v46 — средняя месячная температура воздуха по субъектам Российской Федерации в 2014 г. С°, январь; v47 — средняя месячная

температура воздуха по субъектам Российской Федерации в 2014 г., С°, июль;  $v_{48}$  — количество осадков по субъектам Российской Федерации в 2014 г., январь, среднее, мм;  $v_{49}$  — количество осадков по субъектам Российской Федерации в 2014 г., июль, среднее, мм.

Часть перечисленных показателей использована при расчетах производственных функций, а именно: переменная  $Y$  получается из  $v_{18}$ ,  $K$  из  $v_{25}$  и  $L$  из произведения  $v_3$  на  $v_6$  при введении к постоянным ценам с помощью  $v_{43}$ .

Расчеты показали, что 3 региона из 79 имеют возрастающую отдачу (Сахалинская область, 1,38, Тюменская область, 1,07, Чукотский автономный округ, 1,01), для остальных регионов выполнено соотношение  $\alpha + \beta < 1$ . Самая низкая отдача, 0,38 — у Магаданской области.

### Исследование методом оптимально достоверных разбиений

После того, как значения отдачи были описанным выше образом приведены к бинарному виду, к ним был применен метод оптимально достоверных разбиений (Сенько, 2003; Kirilyuk *et al.*, 2017; Борисова и др., 2020) с целью выявления зависимости отдачи от масштаба с показателями, или их парами. В основе метода лежит поиск параллельных координатным осям границ, оптимальным образом разделяющих объекты с разными уровнями значений прогнозируемой переменной. Качество разбиения с числом элементов (квадрантов), равным  $r$ , в смысле разделения ими объектов некоторого класса  $K$  от всех остальных объектов обучающей выборки, в настоящей работе оценивается с помощью функционала

$$Q = \sum_{j=1}^r m_j (v_j - v_0)^2, \quad (2)$$

где  $v_0$  — доля класса  $K$  в обучающей выборке в целом,  $v_j$  — доля класса в квадранте  $j$ ,  $M_j$  — число описаний объектов внутри квадранта  $j$ .

Следует отметить, что при  $r = 2$  функционал  $Q$  связан со статистикой критерия  $\chi^2$  при проверке гипотезы о связи двух бинарных переменных по таблице сопряженности размером  $2 \times 2$  равенством  $Q = \chi^2 v_0(1 - v_0)$ .

Границы подбираются таким образом, чтобы добиться максимального значения  $Q$ . Верификация закономерностей производится с помощью перестановочных тестов (*Pesarin and Salmaso, 2010*) при использовании достигнутого максимума  $Q$  в качестве статистики критерия. Перестановочный тест заключается в многократном повторении расчетов на случайных выборках, которые получаются из исходной выборки с помощью случайных перестановок значений бинарной целевой переменной относительно фиксированных позиций векторов объясняющих переменных. В качестве меры значимости одномерных закономерностей типа изображенной на рисунке 1 используется  $p$ -значение, равное доле случайных выборок, для которых максимальное значение  $Q$ , полученное при подборе оптимальных границ, оказалось выше максимального значения  $Q$ , полученного на реальных данных. В основе перестановочного теста лежит прямая проверка нулевой гипотезы о независимости целевой переменной от объясняющих переменных. Перестановочный тест не требует предположений о распределениях и не использует никаких асимптотических оценок. При верификации более сложных двумерных закономерностей типа изображенных на рис. 2, 3 оценивается значимость вклада каждой из двух объясняющих переменных. Двумерная закономерность, связывающая принадлежность классу  $K$  с переменными  $x_1$  и  $x_2$ , считается значимой на некотором уровне  $\alpha$ , если значимым на уровне  $\alpha$  оказывается вклад каждой из двух переменных. Оценка значимости переменной  $x_1$  сводится к проверке нулевой гипотезы об исчерпывающем описании наблюдаемого эффекта зависимостью лишь от одной переменной  $x_2$ , описываемой с помощью простого одномерного разбиения с одной границей. При этом, исчерпывающее описание подразумевает независимость целевой переменной от объясняющих переменных

внутри квадрантов слева и справа от оптимальной границы для  $x_2$ . Проверка данной нулевой гипотезы производится с помощью варианта перестановочного теста, аналогичного используемому при верификации простых одномерных гипотез, но с запретом при генерации случайных выборок перестановок значений целевой переменной между квадрантами. Подробно данный вариант перестановочного теста описан в работе (*Senko and Kuznetsova, 2010*). В настоящей работе при использовании перестановочных тестов генерировалось 3000 случайных выборок. Преимущества метода ОДР — возможность выявления нелинейных эффектов и наглядность представления результатов анализа посредством двумерных диаграмм.

### Одномерные разбиения

С помощью ОДР находятся границы в пространстве значений показателей, полученные посредством применения алгоритма оптимизации, разделяющие интервал значений таким образом, что с разных сторон границ преобладают значения для объектов, отнесенных к разным классам. Оценивается эффективность границ с использованием особых функционалов и значимость разбиений по  $p$ -значению.

Результаты применения ОДР для одномерных показателей приведены в таблице 1. Приводятся коды показателей (соответствующие названия — в перечне выше), граничные значения, числа наблюдений, вошедших в первую и вторую группы ниже границ, соответствующие числа выше границ. Далее в столбце значения  $\chi^2$ , соответствующие оптимальным значениям  $Q$  и рассчитанные с помощью перестановочного теста  $p$ -значения.

Как видно из табл. 1, существенную часть показателей, для которых  $p < 0,05$  составляют показатели, непосредственно связанные с производством, часть из которых используется при расчете отдачи. Из 50 исследованных показателей, для 21-го имеет место соотношение  $p < 0,05$ , что свидетель-

Таблица 1. Наиболее информативные показатели при одномерных разбиениях  
(упорядочены по убыванию значимости)

| №  | Показатель | Граница      | Ниже           |                | Выше           |                | $\chi^2$ | p-значение |
|----|------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|------------|
|    |            |              | 1 гр.          | 2 гр.          | 1 гр.          | 2 гр.          |          |            |
| 1  | v18        | 420694,5625  | 30<br>(78,9 %) | 14<br>(34,1 %) | 8<br>(21,1 %)  | 27<br>(65,9 %) | 15,839   | 0,000667   |
| 2  | v22        | 96987,796875 | 28<br>(73,7 %) | 12<br>(29,3 %) | 10<br>(26,3 %) | 29<br>(70,7 %) | 15,368   | 0,001      |
| 3  | v25        | 95297,5      | 29<br>(76,3 %) | 12<br>(29,3 %) | 9<br>(23,7 %)  | 29<br>(70,7 %) | 17,265   | 0,001333   |
| 4  | v23        | 1455259      | 33<br>(86,8 %) | 20<br>(48,8 %) | 5<br>(13,2 %)  | 21<br>(51,2 %) | 12,776   | 0,004      |
| 5  | v19        | 273214,375   | 25<br>(65,8 %) | 10<br>(24,4 %) | 13<br>(34,2 %) | 31<br>(75,6 %) | 13,525   | 0,004333   |
| 6  | v40        | 75419,203125 | 29<br>(76,3 %) | 15<br>(36,6 %) | 9<br>(23,7 %)  | 26<br>(63,4 %) | 12,456   | 0,005      |
| 7  | v34        | 65,150002    | 18<br>(47,4 %) | 5<br>(12,2 %)  | 20<br>(52,6 %) | 36<br>(87,8 %) | 11,673   | 0,006333   |
| 8  | v7         | 833086       | 26<br>(68,4 %) | 12<br>(29,3 %) | 12<br>(31,6 %) | 29<br>(70,7 %) | 11,957   | 0,009      |
| 9  | v39        | 62566,648438 | 28<br>(73,7 %) | 14<br>(34,1 %) | 10<br>(26,3 %) | 27<br>(65,9 %) | 12,225   | 0,009      |
| 10 | v26        | 69638,5      | 27<br>(71,1 %) | 14<br>(34,1 %) | 11<br>(28,9 %) | 27<br>(65,9 %) | 10,624   | 0,012667   |
| 11 | v2         | 3385,800049  | 38<br>(100 %)  | 31<br>(75,6 %) | 0<br>(0 %)     | 10<br>(24,4 %) | 10,477   | 0,013667   |
| 12 | v45        | 22713        | 19<br>(50 %)   | 7<br>(17,1 %)  | 19<br>(50 %)   | 34<br>(82,9 %) | 9,561    | 0,020333   |
| 13 | v31        | 401          | 37<br>(97,4 %) | 29<br>(70,7 %) | 1<br>(2,6 %)   | 12<br>(29,3 %) | 10,049   | 0,022      |
| 14 | v6         | 20986,5      | 19<br>(50 %)   | 7<br>(17,1 %)  | 19<br>(50 %)   | 34<br>(82,9 %) | 9,561    | 0,022333   |
| 15 | v3         | 1728         | 38<br>(100 %)  | 32<br>(78 %)   | 0<br>(0 %)     | 9<br>(22 %)    | 9,295    | 0,026      |
| 16 | v5         | 15626,5      | 28<br>(73,7 %) | 16<br>(39 %)   | 10<br>(26,3 %) | 25<br>(61 %)   | 9,48     | 0,027333   |
| 17 | v29        | 688925       | 38<br>(100 %)  | 32<br>(78 %)   | 0<br>(0 %)     | 9<br>(22 %)    | 9,295    | 0,029      |
| 18 | v44        | 1719,800049  | 38<br>(100 %)  | 32<br>(78 %)   | 0<br>(0 %)     | 9<br>(22 %)    | 9,295    | 0,032      |
| 19 | v9         | 42           | 37<br>(97,4 %) | 30<br>(73,2 %) | 1<br>(2,6 %)   | 11<br>(26,8 %) | 8,85     | 0,034667   |
| 20 | v12        | 25,950001    | 20<br>(52,6 %) | 34<br>(82,9 %) | 18<br>(47,4 %) | 7<br>(17,1 %)  | 8,262    | 0,037333   |
| 21 | v35        | 7501         | 35<br>(92,1 %) | 25<br>(64,1 %) | 3<br>(7,9 %)   | 14<br>(35,9 %) | 8,659    | 0,048333   |

ствует о высокой достоверности связи отдачи от масштаба с другими показателями.

Представим выявленную зависимость графически в наиболее значимом случае, то есть в случае с наименьшим  $p$ -значением. Он соответствует переменной  $v18$  — валовой региональный продукт (млн руб.).

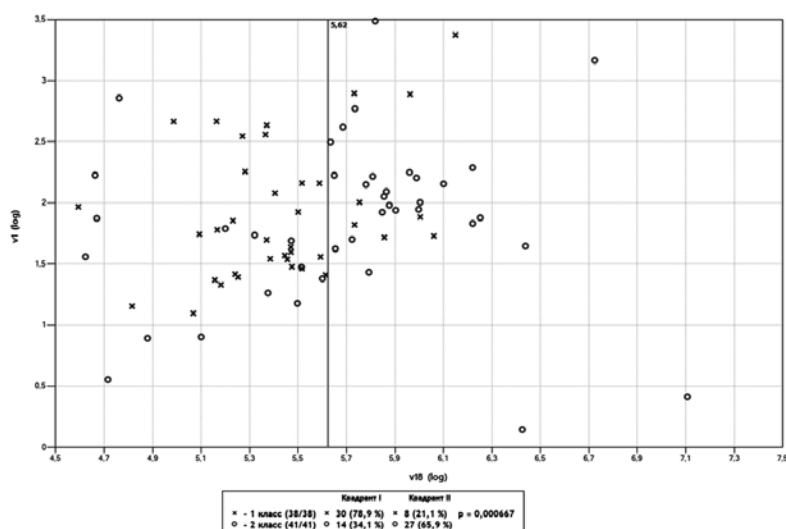


Рис. 1. По оси абсцисс — переменная  $v18$  — валовой региональный продукт, по оси ординат — переменная  $v1$ , используемая в данном случае только для развертки. Круги обозначают класс регионов со значениями отдачи больше медианы, крестики — со значениями меньше медианы

Из рис. 1 наглядно видно существенное преобладание регионов со значениями отдачи больше медианы справа от границы: 27 регионов со значениями отдачи выше медианы против 8 со значениями ниже медианы. Слева от границы преобладают регионы со значениями отдачи ниже медианы: 30 регионов со значениями отдачи ниже медианы против 14 со значениями выше медианы. Статистическая значимость закономерности была с помощью перестановочного теста оценена на уровне  $p=0,000667$ .



Перечислим регионы по группам, соответствующим рис. 1. Здесь и далее «высокими» и «низкими» называются значения показателей в соответствии с расположением относительно обозначенных на рисунках границ (для отдачи относительно медианы).

*С высокими значениями отдачи и высоким ВРП:*

Томская область, Алтайский край, Удмуртская Республика, Республика Коми, Республика Дагестан, Архангельская область, Омская область, Белгородская область, Приморский край, Республика Саха (Якутия), Ленинградская область, Волгоградская область, Оренбургская область, Кемеровская область, Сахалинская область, Новосибирская область, Пермский край, Челябинская область, Ростовская область, Республика Башкортостан, Свердловская область, Республика Татарстан, Краснодарский край, г. Санкт-Петербург, Московская область, Тюменская область, г. Москва.

*С высокими значениями отдачи и низким ВРП:*

Еврейская автономная область, Республика Тыва, Республика Калмыкия, Республика Ингушетия, Чукотский автономный округ, Республика Адыгея, Республика Северная Осетия — Алания, Республика Хакасия, Новгородская область, Чувашская Республика, Астраханская область, Калининградская область, Калужская область, Липецкая область.

*С низкими значениями отдачи и высоким ВРП:*

Хабаровский край, Ставропольский край, Саратовская область, Воронежская область, Иркутская область, Нижегородская область, Самарская область, Красноярский край.

*С низкими значениями отдачи и низким ВРП:*

Республика Алтай, Карачаево-Черкесская Республика, Магаданская область, Кабардино-Балкарская Республика, Псковская область, Республика Марий Эл, Камчатский край, Костромская область, Ивановская область, Курганская область, Республика Мордовия, Орловская область, Республика Бурятия, Республика Карелия, Амурская область, Смоленская

область, Забайкальский край, Брянская область, Кировская область, Ульяновская область, Тамбовская область, Пензенская область, Рязанская область, Курская область, Тверская область, Владимирская область, Мурманская область, Вологодская область, Ярославская область, Тульская область.

## Двумерные разбиения

Исследование при помощи двумерных разбиений предполагает разбиение области значений двух переменных на 4 квадранта, выделенных исходя из цели, чтобы в квадрантах наиболее выраженно преобладали представители одного из 2-х классов. Наряду с 20 переменными, значимость которых была выявлена с помощью одномерных разбиений, были выявлены также значимые двумерные закономерности с участием переменной  $v_{37}$  в сочетаниях с переменными  $v_{25}$  и  $v_{18}$ , переменной  $v_{41}$  в сочетании с переменной  $v_{25}$ , переменной  $v_{11}$  в сочетании с переменной  $v_{19}$ , переменной  $v_{46}$  в сочетании с переменной  $v_{31}$ , переменной  $v_1$  в сочетании с переменной  $v_6$ , переменной  $v_{16}$  в сочетании с переменной  $v_{21}$ , переменной  $v_{32}$  в сочетании с переменной  $v_{47}$ .

Примеры двумерных разбиений представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видна высокая корреляция между переменными  $X$  и  $Y$ . При этом регионы с отдачей выше медианных значений отчетливо разбиваются на две группы. Для одной из групп значения пары переменных находятся в квадранте II, задаваемом неравенствами  $X > 90056$  млн руб.,  $Y > 188,3$  млн руб. В этом квадранте находится 30 регионов с высокой отдачей и только 10 регионов с низкой отдачей. Другая подгруппа регионов с высокой отдачей почти целиком сосредоточена в квадранте IV, задаваемом неравенствами  $X < 90056$  млн руб.,  $Y < 188,3$  млн руб. В этом квадранте находится 8 регионов с высокой отдачей и только 2 региона с низкой отдачей. Регионы с отдачей ниже медианного значения преобладают в квадранте II, задаваемом неравенствами  $X < 90056$  млн руб.,  $Y > 188,3$  млн руб. В этом квадранте находится 26 реги-

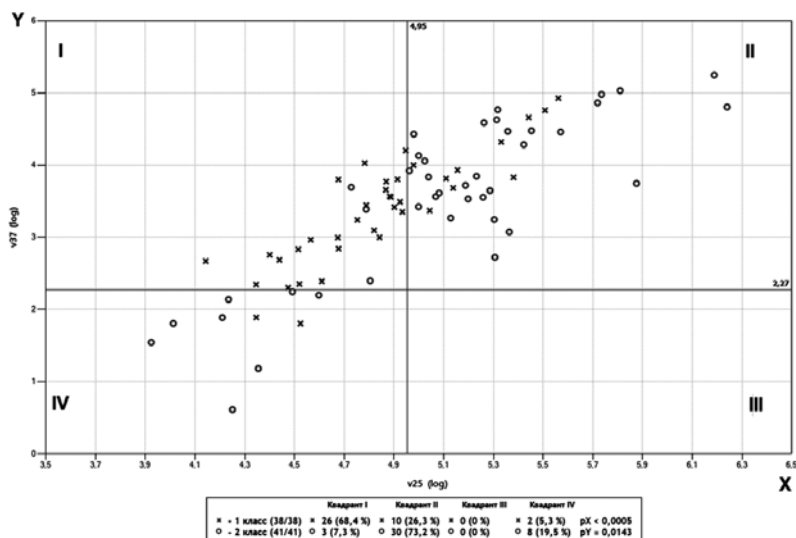


Рис. 2. Вдоль оси X отложены значения переменной  $v25$  — инвестиции в основной капитал, вдоль оси Y отложены значения переменной  $v37$  — затраты на технологические инновации. Для удобства переменные представлены в логарифмической шкале

онов с низкой отдачей и только 3 региона с высокой отдачей. Статистическая значимость этой закономерности оценивается на уровне  $p < 0,0005$  по инвестициям в основной капитал и на уровне  $p = 0,0143$  по затратам на технологические инновации.

Далее приводится соотнесение конкретных регионов с квадрантами.

*Первый квадрант, низкая отдача:*

Ярославская область, Рязанская область, Пензенская область, Республика Мордовия, Владимирская область, Курская область, Амурская область, Ульяновская область, Тверская область, Кировская область, Вологодская область, Мурманская область, Смоленская область, Брянская область, Забайкальский край, Республика Марий Эл, Республика Бурятия, Орловская область, Курганская область, Камчатский край, Костромская область, Республика Алтай, Магаданская

область, Ивановская область, Кабардино-Балкарская Республика, Псковская область.

*Первый квадрант, высокая отдача:*

Чувашская Республика, Новгородская область, Калининградская область.

*Второй квадрант, низкая отдача:*

Красноярский край, Самарская область, Нижегородская область, Иркутская область, Тульская область, Ставропольский край, Воронежская область, Хабаровский край, Саратовская область, Тамбовская область.

*Второй квадрант, высокая отдача:*

г. Москва, Московская область, Республика Татарстан, г. Санкт-Петербург, Тюменская область, Пермский край, Сахалинская область, Волгоградская область, Республика Башкортостан, Челябинская область, Свердловская область, Омская область, Ростовская область, Калужская область, Липецкая область, Удмуртская Республика, Ленинградская область, Томская область, Краснодарский край, Оренбургская область, Новосибирская область, Белгородская область, Астраханская область, Республика Саха (Якутия), Архангельская область, Алтайский край, Приморский край, Республика Коми, Кемеровская область, Республика Дагестан.

*Четвертый квадрант, низкая отдача:*

Карачаево-Черкесская Республика, Республика Карелия.

*Четвертый квадрант, высокая отдача:*

Республика Северная Осетия — Алания, Республика Хакасия, Республика Адыгея, Республика Ингушетия, Еврейская автономная область, Чукотский автономный округ, Республика Калмыкия, Республика Тыва.

Из рис. 3 видно, что низкой отдаче соответствуют регионы, для которых пары значений уровня безработицы и валового регионального продукта на душу населения расположены в левом нижнем квадранте, границы которого задаются неравенствами  $X < 5,85\%$ ,  $Y < 308836,438$  руб. В этом квадранте существенно преобладают регионы с низкой отдачей: 22 региона с отдачей выше медианы и только

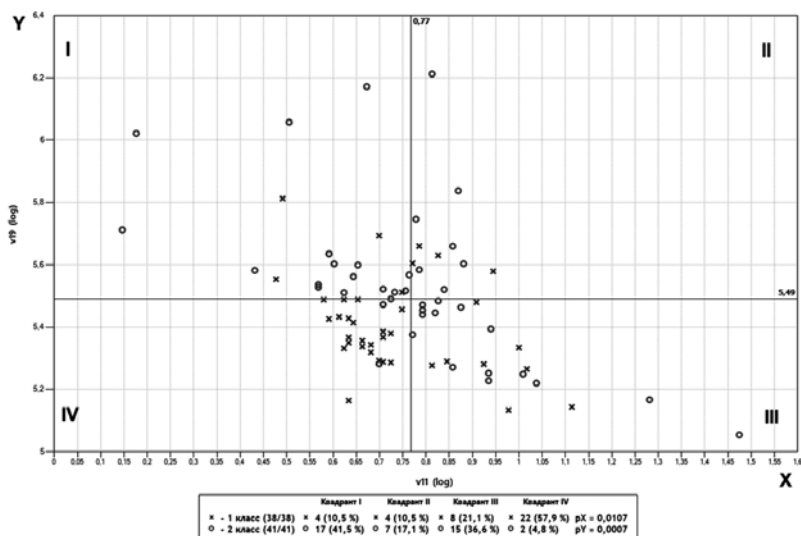


Рис. 3. Вдоль оси X отложены значения переменной v11 – уровень безработицы (в %), вдоль оси Y отложены значения переменной v19 – валовой региональный продукт на душу населения (руб.). Для удобства переменные представлены в логарифмической шкале

2 региона с высокой отдачей. Регионы с отдачей выше медианной преобладают в остальных квадрантах. Статистическая значимость этой закономерности оценивается как  $p = 0,0107$  по уровню безработицы,  $p = 0,0007$  по валовому национальному продукту на душу населения.

Далее приводится соотнесение конкретных регионов с квадрантами.

*Первый квадрант, низкая отдача:*

Магаданская область, Красноярский край, Самарская область, Липецкая область, Вологодская область.

*Первый квадрант, высокая отдача:*

Тюменская область, Чукотский автономный округ, г. Москва, г. Санкт-Петербург, Республика Татарстан, Белгородская область, Ленинградская область, Московская область, Пермский край, Оренбургская область, Новгородская область, Новосибирская область, Краснодарский край,

Калининградская область, Калужская область, Республика Башкортостан.

*Второй квадрант, низкая отдача:*

Камчатский край, Мурманская область, Хабаровский край, Иркутская область.

*Второй квадрант, высокая отдача:*

Сахалинская область, Республика Саха (Якутия), Республика Коми, Архангельская область, Томская область, Свердловская область, Приморский край.

*Третий квадрант, низкая отдача:*

Республика Карелия, Забайкальский край, Курганская область, Республика Бурятия, Псковская область, Республика Алтай, Карачаево-Черкесская Республика, Кабардино-Балкарская Республика.

*Третий квадрант, высокая отдача:*

Омская область, Республика Хакасия, Астраханская область, Челябинская область, Волгоградская область, Кемеровская область, Еврейская автономная область, Ростовская область, Алтайский край, Республика Северная Осетия – Алания, Республика Дагестан, Республика Адыгея, Республика Калмыкия, Республика Тыва, Республика Ингушетия.

*Четвертый квадрант, низкая отдача:*

Нижегородская область, Воронежская область, Ярославская область, Амурская область, Тульская область, Тамбовская область, Курская область, Рязанская область, Смоленская область, Тверская область, Орловская область, Владимирская область, Саратовская область, Костромская область, Ульяновская область, Пензенская область, Республика Мордовия, Республика Марий Эл, Брянская область, Кировская область, Ставропольский край, Ивановская область.

*Четвертый квадрант, высокая отдача:*

Удмуртская Республика, Чувашская Республика.

## Заключение

Из проведенного анализа можно сделать вывод, что существенная часть показателей экономического воспроизводства в регионах демонстрирует значимую связь с отдачей от масштаба производства. Результаты показывают, что наиболее значительное влияние на отдачу имеет, во-первых, размер экономики (хотя можно выделить группу регионов с небольшими значениями валовых показателей, но относительно высокими значениями отдачи производства). Важную, но меньшую роль играют показатели инфраструктуры, включая плотность автомобильных дорог. Фактором, способствующим увеличению отдачи, является высокий средний уровень доходов населения и, одновременно, высокая безработица. Таким образом, одним из интересных результатов является выявленная связь сочетаний признаков с факторами отдачи. Это свидетельствует о том, что необходимо анализировать особенности экономического воспроизводства в каждом регионе в целом, включая и специфику действующей институциональной среды. Проведенные ранее исследования других авторов подтверждают важность такого подхода (*Кирдина и Малков, 2010; Маевский и Малков, 2014*). В этом авторы видят перспективы дальнейшей работы, связанные с использованием предложенной методики. Кроме того, анализируя отдачу регионов, можно заметить, что она в целом выше при наличии в регионах промышленных центров, кластеров, агломераций, что позволяет использовать эту методику для обоснования и проверки принципов моделей популярной в последние десятилетия новой экономической географии, где основополагающую роль в формировании агломераций играет возрастающая отдача в некоторых отраслях, а следовательно может иметь более высокие значения, чем в регионах с менее выраженной агломерацией агрегированная по отраслям отдача (*Dixit and Stiglitz, 1977; Krugman, 1991*).

# ЛИТЕРАТУРА

1. Борисова Л.Р., Кузнецова А.В., Сергеева Н.В., Сенько О.В. Применение методов машинного обучения для сравнения компаний Арктической зоны РФ по экономическим критериям в соответствии с рейтингом Полярного индекса // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. С. 201–215.
2. Гафарова Е.А. Моделирование регионального развития на основе производственных функций // Интернет-журнал «Науковедение». 2013. № 3. С. 1–7. <https://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>
3. Гребнев М.И. Построение производственных функций регионов России // ВУЗ. XXI век. 2015. № 2. С. 50–56.
4. Кирдина С.Г., Малков С.Ю. Два механизма самоорганизации экономики: модельная и эмпирическая верификация (научный доклад). М.: Институт экономики РАН, 2010.
5. Кириллюк И.Л. Модели производственных функций для российской экономики // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 2. С. 293–312.
6. Кириллюк И.Л., Сенько О.В. Выбор моделей оптимальной сложности методами Монте-Карло (на примере моделей производственных функций регионов Российской Федерации) // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Выпуск 2. С. 111–118.
7. Маевский В.И., Малков С.Ю. Перспективы макроэкономической теории воспроизводства // Вопросы экономики. 2014. №. 4. С. 137–155.
8. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2014: Стат. сб. / М.: Росстат, 2014.
9. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2017: Стат. сб. / М.: Росстат, 2017.
10. Российский статистический ежегодник. 2015: Стат.сб./ М.: Росстат, 2015.
11. Сенько О.В. Перестановочный тест в методе оптимальных разбиений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 9. С. 1438–1447.
12. Чубрик А.С. Отдача от масштаба производственной функции и общефакторная производительность: пример Польши и Белоруссии // ЭКОБЕСТ. 2002. Т. 2. №2. С. 252–275.
13. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. 1928. V. 18. No 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association. Pp. 139–165.
14. Dixit A.K., Stiglitz J.E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // The American Economic Review. 1977. V. 67. № 3. Pp. 297–308.



15. Kirilyuk I., Senko O. Verification of the Returns to Scale of Production Type for the Russian Federation Regions // EPJ Web of Conferences. 2019. 224. 06011. Pp. 1–6.
16. Kirilyuk I.L., Kuznetsova A.V., Sen'ko O.V., Morozov A.M. Method for detecting significant patterns in panel data analysis // Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). 2017. V. 27. № 1. Pp. 94–104.
17. Krugman P. Increasing Returns and Economic Geography // Journal of Political Economy. 1991. Vol. 99, No. 3. Pp. 483–499.
18. Pesarin F., Salmaso L. Permutation Tests for Complex Data. Chichester, UK: Wiley. 2010.
19. Senko O.V., Kuznetsova A.V. A recognition method based on collective decision making using systems of regularities of various types // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. Vol. 20. No. 2. Pp. 152–162.

#### REFERENCES

1. Borisova L.R., Kuznetsova A.V., Sergeeva N.V., Sen'ko O.V. 2020. Primenenie metodov mashinnogo obucheniya dlya sravneniya kompanii Arkticheskoi zony RF po ekonomicheskim kriteriyam v sootvetstvi s reitingom Polyarnogo indeksa [Application of machine learning methods for comparing companies in the Arctic zone of the Russian Federation by economic criteria in accordance with the Polar Index rating]. Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie [Computer Research Modeling] 12(1):201-215.
2. Chubrik A.S. 2002. Otdacha ot masshtaba proizvodstvennoi funktsii i obshchefaktornaya proizvoditel'nost': primer Pol'shi i Belorussii [Returns to scale of production function and general factor productivity: the example of Poland and Belarus]. EKOVEST 2(2):252–275.
3. Cobb C.W., Douglas P.H. 1928. A Theory of Production. American Economic Review, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association 18(1):139–165.
4. Dixit A.K., Stiglitz J.E. 1977. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. The American Economic Review 67(3):297–308.
5. Gafarova E.A. 2013. Modelirovanie regional'nogo razvitiya na osnove proizvodstvennykh funktsii [Modeling of regional development based on production functions]. Internet-zhurnal "Naukovedenie" [Internet-journal "Science of science"] (3):1–7. <https://naukovedenie.ru/PDF/39evn313.pdf>.
6. Grebnev M.I. 2015. Postroenie proizvodstvennykh funktsii regionov Rossii [Construction of production functions of Russian regions]. VUZ. XXI vek [High School. XXI Century] 2:50–56.

7. *Kirdina S.G., Malkov S.Yu.* 2010. Dva mekhanizma samoorganizatsii ekonomiki: model'naya i empiricheskaya verifikatsiya (nauchnyi doklad) [Two mechanisms of self-organization of the economy: model and empirical verification (scientific report)]. M.: Institut ekonomiki RAN.
8. *Kirilyuk I., Senko O.* 2019. Verification of the Returns to Scale of Production Type for the Russian Federation Regions. EPJ Web of Conferences. 224(06011):1-6.
9. *Kirilyuk I.L.* 2013. Modeli proizvodstvennykh funktsii dlya rossiiskoi ekonomiki [Models of production functions for the Russian economy]. Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. [Computer Research Modeling] 5(2):293–312.
10. *Kirilyuk I.L., Sen'ko O.V.* 2020. Vybore modelei optimal'noi slozhnosti metodami Monte-Karlo (na primere modelei proizvodstvennykh funktsii regionov Rossiiskoi Federatsii) [Assessing the validity of clustering of panel data by Monte Carlo methods (using as example the data of the Russian regional economy)]. Informatika i ee primeneniya. [Informatics and Applications] 14(2):111-118.
11. *Kirilyuk I.L., Kuznetsova A.V., Sen'ko O.V., Morozov A.M.* 2017. Method for detecting significant patterns in panel data analysis. Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications) 27(1):94-104.
12. *Krugman P.* 1991. Increasing Returns and Economic Geography. Journal of Political Economy 99(3):483-499.
13. *Maevskii, V.I., and S.Yu. Malkov.* 2014. Perspektivy makroekonomicheskoi teorii vosproizvodstva [Perspectives of the macroeconomic Reproduction Theory]. Voprosy ekonomiki [Economic issues] 4:137-155.
14. *Pesarin F., Salmaso L.* 2010. Permutation Tests for Complex Data. Chichester, UK: Wiley.
15. *Regiony Rossii. Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli [Regions of Russia. Socio-economic indicators] 2014: Stat. sb. / M.: Rosstat, 2014.*
16. *Regiony Rossii. Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli [Regions of Russia. Socio-economic indicators] 2017: Stat. sb. / M.: Rosstat, 2017.*
17. *Rossiiskii statisticheskii ezhegodnik [Russian Statistical Yearbook] 2015: Stat.sb./ M.: Rosstat, 2015.*
18. *Sen'ko O.V.* 2003. Perestanovochnyi test v metode optimal'nykh razbieni [Permutation test in the optimal partitioning method]. Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Computational Mathematics and Mathematical Physics] 43(9):1438-1447.
19. *Senko O.V., Kuznetsova A.V.* 2010. A recognition method based on collective decision making using systems of regularities of various types. Pattern Recognition and Image Analysis 20(2):152–162.

### 3.3. ДИСКРЕТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕГОСЯ ВОСПРОИЗВОДСТВА С РАЗЛИЧНЫМИ ВАРИАНТАМИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

*Кириллюк И.А.*

Компьютерные исследования и моделирование. 2016.  
Т. 8. № 5. С. 803–815.

Разные варианты моделей переключающегося режима воспроизводства описывают совокупность взаимодействующих друг с другом макроэкономических производственных подсистем, каждой из которых соответствует свое домашнее хозяйство. Эти подсистемы различаются между собой по возрасту используемого ими основного капитала, поскольку они по очереди останавливают производство продукции для его обновления собственными силами (для ремонта оборудования и для привнесения инноваций, увеличивающих эффективность производства). Это принципиально отличает данный тип моделей от моделей, описывающих режим совместного воспроизводства, при котором обновление основного капитала и производство продукта происходят одновременно. Модели переключающегося режима воспроизводства позволяют наглядно описать механизмы таких явлений, как денежные кругообороты и амортизация, а также описывать различные виды монетарной политики, позволяют по-новому интерпретировать механизмы экономического роста. В отличие от многих других макроэкономических моделей модели этого класса, в которых конкурирующие между собой подсистемы поочередно приобретают преимущество над остальными за счет обновления, принципиально неравновесны. Изначально они были описаны в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений со скачкообразно меняющимися коэффициентами. В численных расчетах, проводившихся для этих систем, в зависимости от значений параметров и начальных условий была выявлена как регулярная, так и нерегулярная динамика. В данной работе показано, что простейшие варианты этой модели без использования дополнительных приближений могут

быть представлены в дискретной форме (в виде нелинейных отображений) при различных вариантах (непрерывных и дискретных) финансовых потоков между подсистемами (интерпретируемых как зарплаты и субсидии). Эта форма представления более удобна для получения строгих аналитических результатов, а также для проведения более экономных и точных численных расчетов. В частности, ее использование позволило определить начальные условия, соответствующие скоординированному, устойчивому экономическому росту без систематического отставания в производительности одних подсистем от других.

**Ключевые слова:** основной капитал, амортизация, переключающийся режим воспроизводства, скоординированный экономический рост, дискретные отображения.

### THE DISCRETE FORM OF THE EQUATIONS IN THE THEORY OF THE SHIFTING MODE OF REPRODUCTION WITH DIFFERENT VARIANTS OF FINANCIAL FLOWS

Different versions of the shifting mode of reproduction models describe set of the macroeconomic production subsystems interacting with each other, to each of which there corresponds the household. These subsystems differ among themselves on age of the fixed capital used by them as they alternately stop production for its updating by own forces (for repair of the equipment and for introduction of the innovations increasing production efficiency). It essentially distinguishes this type of models from the models describing the mode of joint reproduction in case of which updating of fixed capital and production of a product happen simultaneously. Models of the shifting mode of reproduction allow to describe mechanisms of such phenomena as cash circulations and amortization, and also to describe different types of monetary policy, allow to interpret mechanisms of economic growth in a new way. Unlike many other macroeconomic models, model of this class in which the subsystems competing among themselves serially get an advantage in comparison with the others because of updating, essentially not equilibrium. They were originally described as a systems of ordinary

differential equations with abruptly varying coefficients. In the numerical calculations which were carried out for these systems depending on parameter values and initial conditions both regular, and not regular dynamics was revealed. This paper shows that the simplest versions of this model without the use of additional approximations can be represented in a discrete form (in the form of non-linear mappings) with different variants (continuous and discrete) financial flows between subsystems (interpreted as wages and subsidies). This form of representation is more convenient for receipt of analytical results as well as for a more economical and accurate numerical calculations. In particular, its use allowed to determine the entry conditions corresponding to coordinated and sustained economic growth without systematic lagging in production of a product of one subsystems from others.

**Keywords:** fixed assets, depreciation, shifting mode of reproduction, coordinated economic growth, discrete mapping.

## Введение

Теория переключающегося воспроизводства разрабатывается коллективом Центра эволюционной экономики при Институте экономики РАН под руководством академика РАН В.И. Маевского. В последние годы им совместно с С.Ю. Малковым, А.А. Рубинштейном и др. предложено и исследовано несколько новых вариантов математических моделей для описания этой теории (Маевский и Малков, 2013; Маевский и Малков, 2014; Маевский и др., 2015). Особенностью моделей является наличие  $N$  производственных подсистем, где  $N-1$  подсистема работает по программе В (выпуск продукции для рынка) и  $N$ -я подсистема работает по программе А (самообновление основного капитала, то есть осуществляемые своими силами ремонт и замена оборудования, в общем случае сопровождающиеся внедрением инноваций). Подсистемы каждый год по очереди сменяют друг друга в выполнении этой программы. Каждой подсистеме соответствует свое домашнее хозяйство, которое получает там

зарплату и тратит ее на произведенные подсистемами товары. Полагаем, что вся чистая прибыль каждой из подсистем остается в этой подсистеме и направляется на инвестиции.

Таким образом, теория переключающегося режима воспроизводства имеет следующие принципиальные особенности:

- макроэкономическая система дезагрегирована по возрасту основного капитала ее подсистем и по его эффективности, которая может увеличиваться в процессе обновления;
- динамика переменных в моделях теории принципиально неравновесная, ее неравновесность обусловлена эндогенными факторами; фактически в моделях реализована стратегия, именуемая «игра красной королевы», когда развитие конкурирующих между собой подсистем является условием их выживания (Васечкина и Ярин, 2002);
- модели переключающегося режима воспроизводства явно описывают денежный кругооборот, происходящий в макроэкономических системах, что свойственно далеко не всем экономическим моделям.

## Предыстория моделей

Различные варианты экономических моделей, где использована дезагрегация на подсистемы с различным возрастом основного капитала, предложены в работах (Johansen, 1959; Solow, 1960; Канторович и Горьков, 1959; Канторович и Жиянов, 1973; Канторович и др., 1978). В (Матвеевко, 1981) показано, что при такой дезагрегации можно прийти к семейству моделей Неймана, в (Бекларян и др., 2012) исследуются магистральные свойства однопродуктовой динамической модели замещения производственных фондов.

Также есть аналогия между перечисленными моделями и моделью пересекающихся поколений, предложенной П. Даймондом (Diamond, 1965) для описания роли в экономике различных поколений людей. Нелинейная дина-

мика конкурентного замещения поколений инновационного товара исследуется в (Кузнецов и др., 2014).

Теперь вкратце приведем факты из истории используемого нами математического аппарата. Рассматриваемые в данной статье модели изначально предложены в форме дифференциальных уравнений со скачкообразно меняющимися в определенные моменты времени коэффициентами. В теорию таких систем существенный вклад был внесен советскими учеными. Например, подобные системы уравнений рассматриваются в работах (Айзерман и Пятницкий, 1974; Теория..., 1981; Матросов, 1967; Филиппов, 1985). Когда изменения происходят через фиксированные, заданные извне промежутки времени, ситуация упрощается по сравнению с общим случаем. Нами показывается в данной статье, что система уравнений базового варианта модели может быть сведена к системе дискретных отображений благодаря тому, что между эквидистантными моментами переключения описывается системой линейных дифференциальных уравнений, для которой получено аналитически общее решение.

Дискретные отображения являются более известным объектом исследований, чем системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и описываются во многих учебниках по нелинейной динамике. В экономике ранее их использовали, например, в (Лебедева и др., 2006).

Математический аппарат дифференциальных уравнений с разрывной правой частью применяется в исследованиях дезагрегированных по возрасту основного капитала макроэкономических систем, находящихся в режиме переключающегося воспроизводства в моделях публикаций (Маевский и Малков, 2013; Маевский и Малков, 2014; Маевский и др., 2015) и в ряде других публикаций тех же авторов. Возможность сведения таких моделей в простейших случаях к системам нелинейных дискретных отображений продемонстрирована в данной статье.

## Варианты базовой модели переключающегося производства в форме систем дифференциальных уравнений

Базовая версия модели, которую мы здесь рассматриваем, имеет варианты в зависимости от того, какие из денежных потоков мы считаем непрерывными во времени, а какие — дискретными.

Простой частный случай, когда доходы домохозяйств и эмиссии непрерывны во времени, может быть написан в следующем виде:

$$\frac{dM_{hi}}{dt} = h_i Y_i (1 - k_{sh}) - k_{hi} M_{hi} + \Delta M_{hi}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$\frac{dM_{hN}}{dt} = h_N Y'_N v_N (1 - k_{sh}) - k_{hN} M_{hN} + \Delta M_{hN}, \quad (2)$$

$$\frac{dM_{Yi}}{dt} = \sum_{j=1}^N k_{hj} M_{hj} \left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1 - k_{sY}) - h_i Y_i + \Delta M_{Yi}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\frac{dM_{YN}}{dt} = -h_N Y'_N v_N + \Delta M_{YN}, \quad (4)$$

$$\Delta K_N = M'_{YN} - 12(N-1)K'_N k_{aN}, \quad (5)$$

$$Y_N = g_N Y'_N, \quad g_N = 1 + \frac{\Delta K_N}{K'_N}. \quad (6)$$

Более распространенный случай, когда домохозяйства получают зарплаты и субсидии с четкой периодичностью во времени, например раз в месяц, может быть получен заменой уравнений (1)–(4) на соответствующие уравнения, содержащие дельта-функции:

$$\frac{dM_{hi}}{dt} = h_i Y_i (1 - k_{sh}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) - \frac{k_{hi} \hat{M}_{hi}}{\tau} + \Delta M_{hi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1')$$

$$\frac{dM_{hN}}{dt} = h_N Y'_N v_N (1 - k_{sh}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) - \frac{k_{hN} \hat{M}_{hN}}{\tau} + \Delta M_{hN} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau). \quad (2')$$

$$\frac{dM_{Yi}}{dt} = \sum_{j=1}^N k_{hj} \frac{\hat{M}_{hj}}{\tau} \left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1 - k_{sY}) - h_i Y_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) + \Delta M_{Yi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (3')$$



$$\frac{dM_{YN}}{dt} = -h_N Y'_N V_N \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) + \Delta M_{YN} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau). \quad (4')$$

В уравнениях (1)–(6) и (1')–(4') величины с индексами  $i = 1, \dots, N$  интерпретируются следующим образом.

1. *Кусочно-непрерывно меняющиеся переменные:*  $M_{bi}$ ,  $M_{Yi}$ ,  $\Delta M_{bi}$ ,  $\Delta M_{Yi}$ .

$M_{bi}$  – денежные средства домашних хозяйств.

$M_{Yi}$  – денежные капиталы макроэкономических подсистем, накапливаемые для финансирования программы А.

$\Delta M_{bi}$  – дополнительное увеличение доходов домашних хозяйств подсистем, например, через бюджет (увеличение пенсий, пособий, зарплат бюджетникам и т. п.).

$\Delta M_{Yi}$  – государственные субсидии, возникающие, когда государство стремится стимулировать производство.

В некоторых версиях модели предполагается, что  $\Delta M_{bi}$ ,  $\Delta M_{Yi}$  поступают дискретными порциями, в других – что они поступают непрерывно. В любом случае в рамках данной статьи эти переменные экзогенные. Они «вливаются» в экономику извне, поэтому для краткости будем называть их эмиссией (соответственно домохозяйства и в производственные подсистемы).

2. *Дискретно меняющиеся переменные:*  $K_i$ ,  $Y_i$  (с периодом 1 год) и  $\hat{M}_{hi}$  (с периодом 1 месяц).

$K_i$  – стоимость основного капитала  $i$ -й производственной подсистемы.  $\Delta K_N$  – ее изменение для  $N$ -й подсистемы по сравнению с предыдущим годом (предыдущий год обозначается штрихом –  $K'_i$ )<sup>1</sup>.

$Y_i$  – продукты макроэкономических подсистем.

3-3-11ф – средства в группе  $i$ , имеющиеся у домашних хозяйств в начале месяца (эта переменная присутствует только в варианте модели, описываемом уравнениями (1')–(4')).

1. Все другие переменные предыдущего момента переключения также обозначаются штрихом.

3. Константы:  $b_i$ ,  $k_{sb}$ ,  $k_{sY}$ ,  $k_{bi}$ ,  $k_{iN}$ ,  $v_N$ ,  $z_i$ ,  $\tau$ .

$b_i$  — доля выплат зарплат, дивидендов и т. п.  $i$ -й группе домашних хозяйств от стоимостного выражения выпуска продукции  $Y_i$ .

$k_{sb}$  — доля налогов, взимаемых с домохозяйств от их доходов.

$k_{sY}$  — доля уплачиваемых государству макроэкономическими подсистемами налогов от их выручки.

$k_{bi}$  — доля затрат членами  $i$ -й группы домашних хозяйств на покупки в единицу времени от их денежных средств  $M_{bi}$ .

$K_{iN}$  — доля выручки, направляемой в амортизационный фонд, от стоимости основного капитала  $K_N$  соответствующей производственной подсистемы.

$\delta_N$  — коэффициент, учитывающий изменение выплат доходов домашним хозяйствам группы  $N$  к уровню зарплат предыдущего периода (до обновления основного капитала), когда соответствующая группе макроэкономическая подсистема производила потребительскую продукцию.

$z_i$  — корректирующие коэффициенты. При отличии коэффициентов  $z_i$  друг от друга продукты, производимые производственными подсистемами, становятся неидентичными.

$\delta(t - k\tau)$  — дельта-функции в (1')–(4'), где  $\tau$  — период времени, равный в модели одному месяцу.

Таким образом, приведенные в этом разделе уравнения представляют собой модель, описывающую финансовое взаимодействие между производственными системами и домохозяйствами в процессе производства и потребления некоторого продукта, с учетом амортизации и периодического самообновления оборудования подсистем. Государство рассматривается только как экзогенный источник эмиссии и сборщик налогов, банковский сектор не учитывается.

## Дискретная форма уравнений модели переключающегося

### воспроизводства для случая непрерывной эмиссии и зарплаты

Возможность сведения дифференциальных уравнений (1)–(4), как и (1')–(4'), к дискретной форме обусловлена следующими обстоятельствами:

- в промежутках между заданными соседними моментами скачкообразного изменения параметров динамику (1)–(4) и (1')–(4') определяют линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, где характер неоднородности задает явная зависимость эмиссии от времени;
- при этом уравнения (1)–(2) и (1')–(2') в промежутках между заданными соседними моментами скачкообразного изменения параметров являются отдельными, изолированными друг от друга уравнениями, и поэтому общие решения для них получаются отдельно;
- подстановка результатов решения (1)–(2) или (1')–(2') соответственно в (3)–(4) или в (3')–(4') позволяет решить системы дифференциальных уравнений до конца посредством обычного интегрирования;
- уравнения (5)–(6) дискретны изначально.

Опуская явное приведение здесь описанных промежуточных математических выкладок, приведем результат для случая (1)–(6), когда эмиссия непрерывна во времени и функция  $\Delta M_{bi}$  задается формулой  $\Delta M_{bi} = \Delta M'_{bi} e^{\beta t}$ , где  $\Delta M'_{bi}$  – константа,  $\beta$  – параметр, имеющий размерность, обратную времени, общее решение выглядит следующим образом:

$$K_i = K'_i, \quad (7)$$

$$Y_i = Y'_i, \quad (8)$$

$$K_N = K'_N + M'_{YN} - 12(N-1)K'_N k_{aN}, \quad (9)$$

$$Y_N = \left( 1 + \frac{M'_{YN} - 12(N-1)K'_N k_{aN}}{K'_N} \right) Y'_N, \quad (10)$$

$$M_{hi} = \frac{h_i Y_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \left( M'_{hi} - \frac{h_i Y_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} - \frac{\Delta M'_{hi}}{\beta + k_{hi}} \right) e^{-k_{hi} t} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta t}}{\beta + k_{hi}}, \quad (11)$$

$$M_{hN} = \frac{h_N Y'_N v_N (1 - k_{sh})}{k_{hN}} + \left( M'_{hN} - \frac{h_N Y'_N v_N (1 - k_{sh})}{k_{hN}} - \frac{\Delta M'_{hN}}{\beta + k_{hN}} \right) e^{-k_{hN} t} + \frac{\Delta M'_{hN} e^{\beta t}}{\beta + k_{hN}}, \quad (12)$$

$$M_{Yi} = \sum_{j=1}^N k_{hj} \left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1 - k_{sy}).$$

$$\left( \frac{h_j Y_j (1 - k_{sh})}{k_{hj}} t + \left( M'_{hj} - \frac{h_j Y_j (1 - k_{sh})}{k_{hj}} - \frac{\Delta M'_{hj}}{\beta + k_{hj}} \right) \left( -\frac{e^{-k_{hj} t}}{k_{hj}} + \frac{1}{k_{hj}} \right) + \frac{\Delta M'_{hj}}{\beta + k_{hj}} \left( \frac{e^{\beta t}}{\beta} - 1 / \beta \right) \right) -$$

$$- h_i Y_i t + \int_0^t \Delta M_{Yi} dt + M'_{Yi}, \quad (13)$$

$$M_{YN} = -h_N Y'_N v_N t + \int_0^t \Delta M_{YN} dt + M'_{YN}. \quad (14)$$

Везде в (7)–(14)  $i = 1, \dots, N-1$ .

Уравнения (7)–(10) выводятся из (5)–(6) посредством несложных преобразований.

Формулы (7)–(14) справедливы в написанном виде в течение года от момента переключения  $t=0$  вплоть до следующего момента переключения  $t=T$ .

Таким образом, заменяя в (7)–(14)  $t$  на  $T$ , получаем рекуррентные соотношения (иначе говоря, дискретные отображения), связывающие между собой значения величин в следующие непосредственно друг за другом по времени моменты переключений. Благодаря наличию множителей

$\left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right)$  эти отображения являются нелинейными.

### Дискретная форма уравнений модели переключающегося воспроизводства для случая дискретно выделяемых эмиссии и зарплаты

Динамика системы в этом случае описывается системой уравнений (1')–(4') и (5)–(6). В пределах одного месяца это система линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами. Свойство линейности само по себе суще-

ственно облегчает исследование модели. Дополнительным упрощающим решение фактом является то, что уравнения (1')–(2') не зависят от  $M_{Yi}$  и от  $M_{hj}$ , где  $j \neq i$ , и решаются отдельно.

В пределах одного календарного года (то есть в период между переключениями режимов воспроизводства подсистем) дискретные отображения, получающиеся нахождением общих решений (1')–(4') и (5)–(6) в пределах месячных интервалов сами линейны. При этом переменные, которые изменяются только на границе соседних лет, могут считаться в пределах календарного года постоянными параметрами. Это позволяет свести многомерное отображение к одномерным отображениям для отдельных переменных и выписать аналитические решения, связывающие значения переменных на начало следующих друг за другом лет (то есть сначала из системы дифференциальных уравнений получается система дискретных отображений с месячным шагом, которую можно, в свою очередь, свести к системе дискретных отображений с годовым шагом, уже нелинейных).

Уравнения (1') в пределах одного месяца могут быть сведены к виду

$$M_{hi} = \hat{M}_{hi} + h_i Y_i (1 - k_{sh}) - \frac{k_{hi} \hat{M}_{hi}}{\tau} t + \Delta M_{hi}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (15)$$

т. е. предполагается, что между моментами, например, 0 и  $\tau$  один раз «мгновенно» выплачивается зарплата одновременно с эмиссией и при этом происходит непрерывная равномерная трата денег. Считается, что выплаты происходят в начале месяца, при этом за месяц (до следующей порции выплат) домохозяйства успевают потратить долю  $k_{hi}$  от имеющихся на начало месяца сбережений. Величина  $k_{hi}$  в этом случае является безразмерной величиной. На основании (1') можно выписать  $N - 1$  дискретных отображений с шагом в 1 месяц, связывающие значения  $\hat{M}_{hi}$  в моменты получения очередных порций денег (упорядочим их с помощью индекса  $l$ ). Из вида формулы (15) очевидно, что в пределах календарного года это одномерные, независимые между собой отображения вида

$$\hat{M}_{hi}(l+1) = \hat{M}_{hi}(l) + (h_i Y_i (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hi}) - k_{hi} \hat{M}_{hi}(l), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

Рекуррентные соотношения (16), по крайней мере при постоянных параметрах, решаемы в том смысле, что для них можно выписать аналитическую формулу, выражающую значения  $\hat{M}_{hi}$  для любых  $l$  из соответствующего интервала через одно «начальное» значение  $M'_{hi}$ .

В явной форме это решение уравнения (16) выглядит следующим образом:

$$\hat{M}_{hi}(l) = (h_i Y_i (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hi}) \frac{1 - (1 - k_{hi})^l}{k_{hi}} + M'_{hi} (1 - k_{hi})^l, \quad l = 1, 2, \dots, 12, \quad (17)$$

$l$  — номер месяца от начала года.

Уравнения, связывающие значения  $M_{hi}$  в начале и в конце данного календарного года:

$$M_{hi} = (h_i Y_i (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hi}) \frac{1 - (1 - k_{hi})^{12}}{k_{hi}} + M'_{hi} (1 - k_{hi})^{12}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (18)$$

Для подсистемы с номером  $N$  справедливо выражение:

$$M_{hN} = (h_N Y'_N \nu_N (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hN}) \frac{1 - (1 - k_{hN})^{12}}{k_{hN}} + M'_{hN} (1 - k_{hN})^{12}. \quad (19)$$

Уравнения (3') в пределах одного месяца (на интервалах времени, содержащих выплаты домохозяйствам) могут быть сведены к виду

$$M_{Yi} = \hat{M}_{Yi} + \sum_{j=1}^N k_{hj} \frac{\hat{M}_{hj}}{\tau} \left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1 - k_{sY}) t - h_i Y_i + \Delta M_{Yi}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (20)$$

где вводится новое обозначение  $\hat{M}_{Yi}$  для денежных средств, имеющихся у макроэкономических подсистем в начале месяца.

Единственные величины, которые меняются в (20) от месяца к месяцу, кроме  $M_{Yi}$ , — в пределах календарного года, — это  $\hat{M}_{hi}$ , значения которых определяются (17).

Таким образом, можем выписать уравнения, связывающие значения  $M_{Yi}$  в начале и в конце данного календарного года:

$$M_{Yi} = M'_{Yi} + \sum_{j=1}^N k_{hj} \frac{1}{\tau} \left( \frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1 - k_{sY}) t \left( \sum_{l=1}^{12} \hat{M}_{hjl} \right) - 12(h_i Y_i + \Delta M_{Yi}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (21)$$

где  $\hat{M}_{hjl}$  — значения  $\hat{M}_{hi}$  на начало соответствующих месяцев с номером  $l$  от начала года, выражаемые из (17).

Для подсистемы с номером  $N$  справедливо выражение:

$$M_{YN} = M'_{YN} - 12(h_N Y'_N \nu_N + \Delta M_{YN}). \quad (22)$$

Для  $K_i$ ,  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , остаются справедливы формулы (7)–(10). Вместе с (18)–(19) и (21)–(22) они образуют систему нелинейных дискретных отображений с шагом в 1 год.

### Режим скоординированного роста

При изучении описанных выше систем особый интерес представляет исследование условий, при которых происходит скоординированный рост, когда все подсистемы развиваются без кризисов, по очереди обгоняя друг друга.

Простейший вариант математической формулировки такого случая характеризуется тем, что все переменные всех  $N$  подсистем умножаются через  $N$  шагов по времени от данного момента на единый показатель  $\mu^N$ :

$$K_i = \mu^N K_{0i}, \quad Y_i = \mu^N Y_{0i}, \quad M_{hi} = \mu^N M_{h0i}, \quad M_{Yi} = \mu^N M_{Y0i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Независимо от того, дискретно или непрерывно во времени поступает эмиссия, будем считать, что в последовательные моменты переключения она удовлетворяет условию

$$\Delta M_{hi} = \mu \Delta M'_{hi}, \quad \Delta M_{Yi} = \mu \Delta M'_{Yi}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Очевидно, что величины эмиссии в моменты времени, отстоящие друг от друга на  $N$  шагов, связаны соотношениями, аналогичными (23).

Также предположим, что  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в начальный момент времени отличаются друг от друга в различные сте-

пени числа  $\mu$  в зависимости от того, через сколько шагов их значения обновятся, таким образом, чтобы они, по циклу опережая друг друга, принимали бы значения, равные произведению единого множителя на различные степени  $\mu$ .

Согласно (8), (10), (23)  $Y_i$  на каждом шаге увеличивается в  $\mu N$  раз для одной из подсистем, до которой дошла очередь, в то время как для других подсистем значения  $Y_i$  остаются неизменными.

Сначала рассмотрим случай непрерывных зарплат и эмиссий.

Уравнения (11), (12) могут быть переписаны в виде

$$M_{hi} = \left( \frac{h_i Y_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta t}}{\beta + k_{hi}} \right) (1 - e^{-k_{hi} t}) + M'_{hi} e^{-k_{hi} t}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (25)$$

$$M_{hN} = \left( \frac{h_N Y_N \nu_N (1 - k_{sh})}{k_{hN}} + \frac{\Delta M'_{hN} e^{\beta t}}{\beta + k_{hN}} \right) (1 - e^{-k_{hN} t}) + M'_{hN} e^{-k_{hN} t}. \quad (26)$$

Соотношения (25), (26) справедливы для всех соседних моментов переключений, то есть, для  $t$ , равного промежутку времени между этими моментами  $T$ , что позволяет линейно выразить  $M'_{hi}$  через  $M''_{hi}$ , а  $M''_{hi}$  через  $M'''_{hi}$  и так далее, на  $N$  шагов назад во времени. Уравнения динамики эмиссий (24) также позволяют выразить все их значения через значение  $N$  шагов назад от текущего момента, величины  $Y_i$  выражаются через прошлые значения согласно (8), (10), (23). Таким образом,  $M_{hi}$  и  $M_{hN}$  можно выразить только через значения переменных  $N$ -го шага назад по времени и констант, а затем, используя (23), вычислить начальные значения  $M_{hi}$  и  $M_{hN}$ , при которых возможен скоординированный рост.

Приведем здесь значение рассчитанного начального условия для  $M_{hi}$ ,  $i = 1, \dots, N$  при  $N = 3$ , введя для унификации записи и сокращения числа формул обозначение:

$$X_i \equiv Y_i, \quad i = 1, 2, \quad X_i \equiv Y'_N \nu_N, \quad i = N = 3.$$

$$M'''_{hi} = \left( \frac{1 - e^{-k_{hi} T}}{\mu^3 - e^{-3k_{hi} T}} \right) R_{\text{непр}}, \quad (27)$$



$$R_{\text{непр}} \equiv \left( \frac{h_i X_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) + \left( \frac{h_i X'_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M''_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) e^{-k_{hi} T} + \\ + \left( \frac{h_i X''_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'''_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) e^{-2k_{hi} T}.$$

Обобщение (27) на случай любого  $N$ , а также нахождение, исходя из аналогичных рассуждений, начального условия для  $M_{Yi}$  (с использованием дополнительно (13), (14)) никаких дополнительных трудностей не вызывают, но, поскольку в результате получаются весьма громоздкие формулы, мы их здесь не приводим.

Начальные условия для капитала находятся по формуле, полученной подстановкой (9) в (23) и арифметическими преобразованиями:

$$K'_N = M'_{YN} / (\mu^N + 12(N-1)k_{\alpha N} - 1). \quad (28)$$

В случае дискретного поступления зарплат и эмиссий используемые в расчетах начальных условий скоординированного роста соотношения (8), (10), (23), (24), (28) такие же, как в непрерывном случае, и используются так же. Вместо формул (25), (26), (13), (14) используются соответственно формулы (18), (19), (21), (22).

Начальное условие для  $M_{hi}$  при  $N = 3$ , например, для этого случая выглядит следующим образом:

$$M'''_{hi} = \left( \frac{1 - (1 - k_{hi})^{12}}{\mu^3 - (1 - k_{hi})^{36}} \right) R_{\text{дискр}}, \\ R_{\text{дискр}} \equiv \frac{h_i X_i (1 - k_{sh}) + \mu^3 \Delta M'''_{hi}}{k_{hi}} + \frac{(h_i X'_i (1 - k_{sh}) + \mu^2 \Delta M''_{hi}) (1 - k_{hi})^{12}}{k_{hi}} + \\ + \frac{(h_i X''_i (1 - k_{sh}) + \mu \Delta M'_{hi}) (1 - k_{hi})^{24}}{k_{hi}}.$$

Справедливость приводимых в этом разделе рассуждений проверена созданием программы в Excel, которая для случая  $N = 3$  рассчитывает набор начальных условий, соответствующих скоординированному росту (23).

На рис. 1а показана зависимость  $Y_i(t)$  (переменной, динамика которой в рассматриваемых моделях непосредственно характеризует экономический рост), типичная для режима скоординированного роста.

Рис. 1б характеризует более общий случай неравномерного развития подсистем, когда условия скоординированного роста не выполнены.

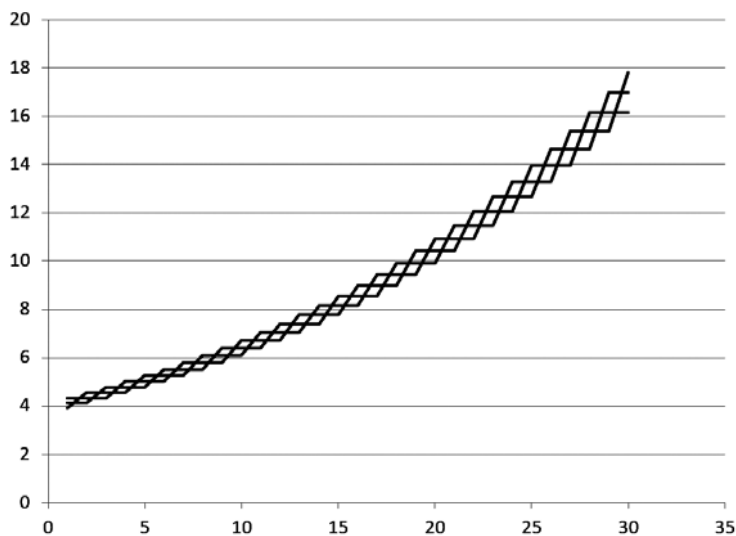


Рис. 1а.  $Y_i(t)$ , скоординированный рост

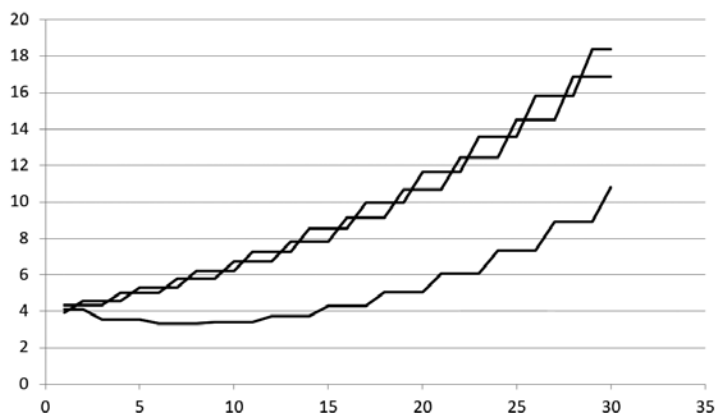


Рис. 1б.  $Y_i(t)$ , раскоординированный рост

Также отметим, что в формулы, описывающие начальные условия скоординированного роста, такие параметры, как  $h_i$ ,  $k_{sb}$ ,  $k_{sy}$ ,  $k_{\alpha N}$ ,  $v_N$ , входят линейно в отличие  $k_{bi}$  и  $z_i$ . Линейное вхождение параметров в данном случае дает легкую возможность частичной замены их начальными условиями при определении условий скоординированного роста.

## Заключение

Приведение уравнений теории переключающегося режима воспроизводства к дискретной форме открывает дополнительные возможности получения строгих математических результатов и упрощает численные исследования. Благодаря такому представлению в статье получены начальные условия, соответствующие скоординированному росту подсистем, когда они в долгосрочной перспективе имеют экспоненциальный рост без получения систематического преимущества какими-либо из них над другими.

Особенностью рассмотренного в данной статье простейшего варианта модели переключающегося воспроизводства является то, что переключения происходят через фиксированные, экзогенно заданные интервалы времени. В более сложных версиях, например при включении в рассмотрение банковской системы, моменты скачкообразного изменения формы уравнений могут определяться динамикой системы, например необходимостью для подсистем при каких-то условиях брать кредиты.

Автор выражает искреннюю благодарность академику РАН, д.э.н. В.И. Маевскому, д.т.н. С.Ю. Малкову, к.э.н. А.А. Рубинштейну, д.соц.н., к.э.н. С.Г. Кирдиной, к.э.н. М.Ю. Иванову, д.э.н. С.А. Андрюшину за полезные обсуждения.

# ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. Основы теории разрывных систем I, II // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7. С. 33–47; № 8. С. 39–61.
2. Ajzerman M.A., Pjatnickij E.S. Osnovy teorii razryvnyh sistem I, II [Fundamentals of the theory of discontinuous systems] // Automation and Remote Control. 1974. No. 7. Pp. 33–47; No. 8. P. 39–61 (in Russian).
3. Бекларян Л.А., Борисова С.В., Хачатрян Н.К. Однопродуктовая динамическая модель замещения производственных фондов. Магистральные свойства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 801–817.
4. Beklarjan L.A., Borisova S.V., Hachatrjan N.K. Odnoproduktovaja dinamicheskaja model' zameshhenija proiz-vodstvennyh fondov. Magistral'nye svojstva [A single-product dynamic model of replacing production capacities. Turnpike properties] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. Vol. 52, No. 5. Pp. 801–817 (in Russian).
5. Васечкина Е.Ф., Ярин В.Д. Динамическое моделирование эколого-экономической системы // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: ЭКОСИ – Гидрофизика. 2002. С. 163–174.
6. Vasechkina E.F., Jarin V D. Dinamicheskoe modelirovanie jekologo-jekonomicheskoy sistemy [Dynamic modeling of ecological-economic system] // Jekologicheskaja bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleks noe ispol'zovanie resursov shel'fa. Sevastopol': JeKOSI – Gidrofizika. 2002. Pp. 163–174 (in Russian).
7. Матвеев В.Д. Дискретная модель с фондами, различающимися по срокам службы // Оптимизация. 1981. Вып. 26 (43). С. 90–102.
8. Matveenko V D. Diskretnaja model' s fondami, razlichajushhimisja po srokam sluzhby [Discrete model with the funds that differ in life cycle] // Optimizacija. – 1981. Vol. 26 (43). Pp. 90–102 (in Russian).
9. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Доклады АН СССР. 1959. Т. 129. № 4. С. 732–736.
10. Kantorovich L.V., Gor'kov L.I. O nekotoryh funkcional'nyh uravnenijah, vznikajushhih pri analize odnoproduktovoj jekonomicheskoy modeli [About some functional equations arising in the analysis of single-product economic model] // Doklady AN SSSR. 1959. Vol. 129. No. 4. Pp. 732–736 (in Russian).
11. Канторович Л.В., Жиянов В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов

- при наличии технического прогресса // Доклады АН СССР. 1973. Т. 211. № 6. С. 1280–1283.
12. *Kantorovich L.V., Zhijanov V.I.* Odnoproduktovaja dinamicheskaja model' jekonomiki, uchityvajushhaja izmene-nie struktury fondov pri nalichii tehničeskogo progressa [The single-product dynamic model of economy considering change of structure of funds in the presence of technical progress] // Doklady AN SSSR. 1973. Vol. 211. No. 6. Pp. 1280–1283 (in Russian).
  13. *Канторович Л.В., Жиянов В.И., Хованский А.Г.* Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // Сб. тр. ВНИИ системных исслед. 1978. Вып. 9. С. 5–25.
  14. *Kantorovich L.V., Zhijanov V.I., Hovanskij A.G.* Analiz dinamiki jekonomicheskikh pokazatelej na osnove odno-produktovyh dinamicheskikh modelej [The analysis of dynamics of economic indicators on the basis of single-product dynamic models] // Sb. tr. VNII sistemnyh issled. 1978. Vol. 9. Pp. 5–25 (in Russian).
  15. *Кузнецов Ю.А., Маркова С.Е., Мичасова О. В.* Математическое моделирование динамики конкурентного замещения поколений инновационного товара // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2(1). С. 170–179.
  16. *Kuznecov Ju. A., Markova S. E., Michasova O. V.* Matematicheskoe modelirovanie dinamiki konkurentnogo za-meshhenija pokolenij innovacionnogo tovara [Mathematical modeling of dynamics of competitive replacement of generations of innovative goods] // Vestnik Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2014. No. 2(1). Pp. 170–179 (in Russian).
  17. *Лебедева И.В., Лебедев В.И. Смыкова Н.В.* Самоорганизация, прогнозирование и управление в макроэкономических системах // Фундаментальные исследования. 2006. № 2. С. 48–49.
  18. *Lebedeva I.V., Lebedev V.I., Smykova N.V.* Samoorganizacija, prognozirovanie i upravlenie v makrojekonomicheskikh sistemah [Self-organization, forecasting and management in macroeconomic systems] // Fundamental'nye issledovanija. 2006. No. 2. P. 48–49 (in Russian).
  19. *Маевский В.И., Малков С.Ю.* Новый взгляд на теорию воспроизводства: Монография. М.: ИНФРА-М, 2013.
  20. *Maevskij V.I., Malkov S Ju.* Novyj vzgljad na teoriju vosproizvodstva: Monografija [A New Approach to the Theory of Reproduction]. M.: INFRA-M, 2013 (in Russian).
  21. *Маевский В., Малков С.* Перспективы макроэкономической теории воспроизводства // Вопросы экономики. 2014. № 4. С. 137–155.

22. *Maevskij V., Malkov S.* Perspektivy makroekonomicheskoj teorii vosпроизводства [Perspectives of the macroeconomic Reproduction Theory] // *Voprosy jekonomiki*. 2014. No. 4. Pp. 137–155 (in Russian).
23. *Маевский В.И., Малков С.Ю., Рубинштейн А.А.* Теория и модель перекрывающихся поколений основного капитала. М.: Институт экономики РАН, 2015.
24. *Maevskij V.I., Malkov S.Ju., Rubinshtejn A.A.* Teorija i model' perekryvajushhihsja pokolenij osnovnogo kapitala. [Overlapping Generations of Fixed Capital Theory and Model]. М.: Institut jekonomiki RAN, 2015 (in Russian).
25. *Мамросов В.М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, II // *Дифференциальные уравнения*. 1967. Т. 3. № 3. С. 395–409; № 5. С. 869–878.
26. *Matrosov V.M.* O differencial'nyh uravnenijah i neravenstvah s razryvnymi pravymi chastjami I, II [About the differential equations and inequalities with discontinuous right parts] // *Differencial'nye uravnenija*. 1967. Vol. 3. No. 3. Pp. 395–409; No. 5. Pp. 869–878 (in Russian).
27. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1981.
28. *Teorija sistem s peremennoj strukturoj* [The theory of systems with variable structure] / Pod red. S. V. Emel'janova. М.: Nauka, 1981 (in Russian).
29. *Филиппов А.Ф.* дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
30. *Filippov A.F.* differencial'nye uravnenija s razryvnoj pravoj chast'ju [The differential equations with discontinuous right part]/ М.: Nauka, 1985 (in Russian).
31. *Diamond P.A.* National Debt in Neoclassical Growth Model // *American Economic Review*. 1965. 5 (5). Pp. 1126–1150.
32. *Johansen L.* Substitutions versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis // *Econometrica*. 1959. Vol. 27. No. 2. P. 157–175.
33. *Solow R.M.* Investment and technical progress // Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick, *Mathematical models in the social sciences*, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV, Stanford, California: Stanford University Press, 1960. Pp. 89–104.

Раздел 4

МЕТОДЫ  
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА ДАННЫХ  
В ЭКОНОМИЧЕСКИХ  
ИССЛЕДОВАНИЯХ

#### 4.1. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА КЛАСТЕРИЗАЦИИ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО (НА ПРИМЕРЕ ДАННЫХ РОССИЙСКОЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ)

*Кириллюк И.А., Сенько О.В.*

Компьютерные исследования и моделирование. 2020.  
Т. 12. № 6. С. 1501–1513.

В работе рассматривается метод исследования панельных данных, основанный на использовании агломеративной иерархической кластеризации — группировки объектов на основании сходства и различия их признаков в иерархию вложенных друг в друга кластеров. Применялись 2 альтернативных способа вычисления евклидовых расстояний между объектами — расстояния между усредненными по интервалу наблюдений значениями и расстояния с использованием данных за все рассматриваемые годы. Сравнивались 3 альтернативных метода вычисления расстояний между кластерами. В первом случае таким расстоянием считается расстояние между ближайшими элементами из двух кластеров, во втором — среднее по парам элементов, в третьем — расстояние между наиболее удаленными элементами. Исследована эффективность использования двух индексов качества кластеризации — индекса Данна и Силуэта для выбора оптимального числа кластеров и оценки статистической значимости полученных решений. Способ оценивания статистической достоверности кластерной структуры заключался в сравнении качества кластеризации, на реальной выборке с качеством кластеризаций на искусственно сгенерированных выборках панельных данных с теми же самыми числом объектов, признаков и длиной рядов. Генерация производилась из фиксированного вероятностного распределения. Использовались способы симуляции, имитирующие гауссов белый шум и случайное блуждание. Расчеты с индексом Силуэт показали, что случайное блуждание характеризуется не только ложной регрессией, но и ложной



кластеризацией. Кластеризация принималась достоверной для данного числа выделенных кластеров, если значение индекса на реальной выборке оказывалось больше значения 95%-ного квантиля для искусственных данных. В качестве выборки реальных данных использован набор временных рядов показателей, характеризующих производство в российских регионах. Для этих данных только Силуэт показывает достоверную кластеризацию на уровне  $p < 0.05$ . Расчеты также показали, что значения индексов для реальных данных в целом ближе к значениям для случайных блужданий, чем для белого шума, но имеют значимые отличия и от тех, и от других. Визуально можно выделить скопления близко расположенных друг от друга в трехмерном признаковом пространстве точек, выделяемые также в качестве кластеров применяемым алгоритмом иерархической кластеризации.

**Ключевые слова:** достоверность кластеризации, панельные данные, мезоэкономика, экономика регионов.

#### ASSESSING THE VALIDITY OF CLUSTERING OF PANEL DATA BY MONTE CARLO METHODS (USING AS EXAMPLE THE DATA OF THE RUSSIAN REGIONAL ECONOMY)

The paper considers a method for studying panel data based on the use of agglomerative hierarchical clustering – grouping objects based on the similarities and differences in their features into a hierarchy of clusters nested into each other. We used 2 alternative methods for calculating Euclidean distances between objects – the distance between the values averaged over observation interval, and the distance using data for all considered years. Three alternative methods for calculating the distances between clusters were compared. In the first case, the distance between the nearest elements from two clusters is considered to be distance between these clusters, in the second – the average over pairs of elements, in the third – the distance between the most distant elements. The efficiency of using two clustering quality indices, the Dunn and Silhouette index, was studied to select the optimal number of clusters and evaluate the statistical significance of the obtained solutions. The method of assessing statistical reliability of cluster

structure consisted in comparing the quality of clustering on a real sample with the quality of clustering on artificially generated samples of panel data with the same number of objects, features and lengths of time series. Generation was made from a fixed probability distribution. At the same time, simulation methods imitating Gaussian white noise and random walk were used. Calculations with the Silhouette index showed that a random walk is characterized not only by spurious regression, but also by “spurious clustering”. Clustering was considered reliable for a given number of selected clusters if the index value on the real sample turned out to be greater than the value of the 95% quantile for artificial data. A set of time series of indicators characterizing production in the regions of the Russian Federation was used as a sample of real data. For these data only Silhouette shows reliable clustering at the level  $p < 0.05$ . Calculations also showed that index values for real data are generally closer to values for random walks than for white noise, but it have significant differences from both. Since three-dimensional feature space is used, the quality of clustering was also evaluated visually. Visually, one can distinguish clusters of points located close to each other, also distinguished as clusters by the applied hierarchical clustering algorithm.

**Keywords:** clustering validity, panel data, mesoeconomics, regional economics.

## 1. Введение

Во многих областях знания исследователи имеют дело с наборами временных рядов, или панельных данных, объединенных в подгруппы на основании каких-либо признаков. Иногда такое разбиение множества временных рядов на подгруппы не является изначально очевидным, и его выявление является предметом интереса исследователей. В этом случае возникает задача кластеризации временных рядов (*Liao, 2005; Aghabozorgi et al., 2015; Ивахненко и др., 2007*). В некоторых публикациях рассматривается также задача кластеризации панельных данных, например в (*Kapetanios, 2006; Niu, 2012*). Традиционные подходы в анализе панельных данных во мно-

гом сосредоточены на проверке гипотез о равенстве коэффициентов в панелях, задача их кластеризации редко ставится, хотя она в каких-то случаях может дать более детальную, существенную информацию. А игнорирование кластерной структуры данных может повлечь некорректные статистические выводы при их исследовании.

Важным фактором в задачах кластеризации является оценка ее качества и достоверности. Для оценки качества кластеризации предложено множество разнообразных индексов (в литературе есть перечни из десятков таких индексов (*Halkidi et al.*, 2001; *Charrad et al.*, 2014; *Сивоголовко*, 2011)). Эти индексы позволяют сравнивать различные варианты кластеризации. С их помощью определяется, разбиение на какое число кластеров в исследуемом объеме признакового пространства дает наиболее достоверную и выраженную группировку. Однако они не позволяют напрямую сделать вывод о достоверности полученных решений. Для оценки достоверности кластеризации существуют различные подходы. Например, вывод о ее достоверности может быть сделан на основании мнения экспертов или при соответствии кластеризации значениям каких-то внешних факторов, не используемых при кластеризации. Одним из важных способов установления достоверности кластеризации является оценивание ее статистической значимости в смысле вероятности случайного опровержения нулевой гипотезы об отсутствии кластеризации. Верификация является важным элементом научных исследований. Отсутствие верификации или ее некорректное проведение может приводить к необоснованным и нередко ложным выводам. Данное утверждение, несомненно, должно относиться ко всем методам поиска закономерностей в данных, в том числе и к кластеризации.

Для того чтобы содержательно интерпретировать эффекты, связанные с кластеризацией, нужно с приемлемой степенью достоверности убедиться, что они существуют, что данные концентрируются в нескольких разделенных областях признакового пространства (т. е. что вероятность соот-

ветствия данных нулевой гипотезе, предполагающей генерацию всех данных из одного и того же равномерного или унимодального распределения, не имеющего соответственно кластерной структуры, мала, например менее 0.05). Описание нулевых гипотез, применяемых при валидации результатов кластеризации, можно найти, например, в (Gordon, 1996; Giancarlo and Utro, 2012).

Мерой статистической значимости предположения о реальном существовании кластеризации, полученной на реальных данных, может служить вероятность случайного достижения или превышения значения соответствующего индекса оценки качества кластеризации над значениями индексов оценки качества кластеризаций, полученных на данных, генерируемых при условии справедливости нулевой гипотезы.

В статистике такие вероятности принято называть *p*-значениями. Одним из способов оценивания *p*-значений является использование методов Монте-Карло, когда значения статистики критерия на реальных данных сравниваются со значениями статистики критерия на данных, сэмплированных из распределения в соответствии с нулевой гипотезой с использованием генераторов случайных чисел. Данный подход достаточно широко используется для верификации разнообразных регрессионных связей. Однако для верификации результатов кластерного анализа случайное сэмплирование используется, на наш взгляд, значительно реже, особенно в задачах с панельными данными. Вместе с тем такие задачи обладают существенной спецификой, связанной с неоднозначностью выбора нулевой гипотезы.

В частности, нулевая гипотеза может заключаться в том, что все рассматриваемые временные ряды для каждого показателя являются реализациями некоторого случайного процесса с одинаковыми характеристиками (средним, дисперсией, длиной ряда и т. д.). В этом случае временные ряды образуют фактически один кластер, а выявление большего числа кластеров является артефактом.

В данном исследовании демонстрируется методология верификации рядом альтернативных способов существования более чем одного кластера в данных на примере исследования совокупности регионов Российской Федерации в пространстве признаков, характеризующих их производственные функции. Выбор примера обусловлен тем, что ранее авторами подобная методология применялась для исследования производственных функций российских регионов (*Кириллюк и Сенько, 2020*).

В работах ряда исследователей, например в (*Айвазян и др., 2016; Бахитова и др., 2014; Магомадов и Шамилев, 2014*) и во многих других, приводятся варианты классификаций и кластеризаций регионов России по группам с использованием производственных функций, или наборов некоторых экономических показателей. В качестве примеров публикаций, где для этих задач используется иерархическая кластеризация, можно привести (*Нижегородцев и Горидько, 2014; Сибукаев, 2019*). Интерес к этой теме обосновывается тем, что выявление достаточно достоверных кластеров позволяет более корректно проводить статистические расчеты, а также предполагает дальнейшие исследование по выявлению приведших к их возникновению механизмов, что может увеличить точность прогнозов. Для регионов из одного кластера могут быть полезны выработка единых рекомендаций, разработка общих программ сбалансированного развития.

Наш подход позволяет давать математическую оценку обоснованности разбиений регионов на кластеры, когда они производятся на основе наборов количественных признаков.

В публикациях, исследующих совокупность экономических объектов, на наш взгляд, могут быть выделены следующие подходы к использованию кластерного анализа:

- 1) объекты рассматриваются без учета их неоднородности;
- 2) проводится деление объектов на группы, но без применения кластерного анализа;

3) кластерный анализ проводится, но не производится оценка качества получившейся кластеризации с помощью соответствующих индексов;

4) качество кластеризации оценивается при помощи соответствующих индексов, но не решается задача оценки вероятности случайного возникновения высоких значений индексов (их возникновение можно рассматривать как ложную кластеризацию);

5) проводится кластерный анализ, вычисляются индексы качества кластеризации и оценивается вероятность случайного появления получившихся их значений.

Наш опыт говорит, что количество публикаций, которые можно сопоставить номерам пунктов приведенного перечня, существенно уменьшается с ростом номера.

## 2. Используемые данные

Нами произведена оценка кластерной структуры в пространстве показателей 79 регионов Российской Федерации, для которых есть нужный набор данных за рассматриваемый период (*Регионы России...*, 2017) (по данным за 1996–2014 гг.). Используемые панельные данные (те же, что ранее применялись нами в вышеупомянутой статье (*Кирилук и Сенько*, 2020) для построения производственных функций регионов) включают следующие показатели:  $Y$  — валовый региональный продукт,  $I$  — инвестиции в основной капитал,  $L$  — среднегодовая численность занятых в экономике, помноженная на среднемесячную номинальную начисленную заработную плату работающих в экономике. Приведение величин к постоянным ценам (процедура, устраняющая искажающее влияние инфляции) осуществлялось с использованием индексов потребительских цен. Все используемые признаки были прологарифмированы. Средние значения временных рядов показателей, их дисперсии, тренды и прочие подобные характеристики образуют трехмерные пространства, что дает возможность наглядно оценить их кластерную структуру.

### 3. Методы кластеризации

Методы кластеризации делятся на неиерархические, типичным представителем которых является, например, метод  $k$ -средних, и иерархические. Авторами применяется агломеративная иерархическая кластеризация, когда в результате работы соответствующего алгоритма создается иерархия (дерево) вложенных кластеров. Преимущество иерархической кластеризации над альтернативными подходами заключается в том, что при ее применении не нужно выдвигать априорных предположений о числе кластеров.

Существует ряд метрик, характеризующих дистанции между временными рядами (например, dynamic time warping, манхэттонское расстояние и т. д.). В данной статье для данных, характеризующих объекты, практически синхронно развивающиеся во времени, и составляющих относительно короткие временные ряды, авторы предпочли использовать евклидову метрику. Используются два альтернативных подхода с применением евклидовой метрики.

1. Вычисление средних по времени значений рядов и последующее применение к ним алгоритма кластерного анализа. Кластеризация производится в пространстве из трех признаков, являющихся средними значениями по интервалу наблюдений показателей  $Ln(Y)$ ,  $Ln(I)$ ,  $Ln(L)$ . Расстояния между регионами  $i$  и  $j$  вычисляются в этом случае по формуле:

$$d_{xij} = \left[ \sum_{p=1}^3 (\bar{x}_{jp} - \bar{x}_{ip})^2 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где черта над  $x_{ip}$ ,  $x_{jp}$  означает усреднение по времени значений показателей  $Ln(Y)$  при  $p = 1$ ,  $Ln(I)$  при  $p = 2$  и  $Ln(L)$  при  $p = 3$  для этих регионов.

2. Вычисление дистанций между трехкомпонентными временными рядами с использованием разностей их значений за все 19 лет рассматриваемого периода наблюдения и кластеризация с использованием этих дистанций:

$$\left[ d_{xij} = \sum_{p=1}^3 \sum_{t=1}^{19} (x_{jpt} - x_{ipt})^2 \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где  $x_{ipt}$ ,  $x_{jpt}$  — значения признаков  $i$ -го и  $j$ -го регионов в год  $t$ .

Существует ряд альтернативных методов определения межкластерного расстояния при агломерации. В данной работе использовались три метода: complete, average, single, где расстояние между кластерами определяется соответственно как расстояние между наиболее удаленными друг от друга элементами двух кластеров, среднее расстояние между всеми парами элементов и расстояние между наиболее близкими элементами. Алгоритмы complete находят более компактные кластеры, а single, наоборот, — кластеры сложной формы, вытянутые, и они более чувствительны к шуму.

#### 4. Индексы оценки качества кластеризации

Из множества существующих индексов оценки качества кластеризации нами отобраны для исследования (как одни из наиболее популярных) два: индекс Данна (Dunn, 1974) и Силуэт (Silhouette) (Rousseeuw, 1987).

Индекс Данна здесь используется в первоначальном варианте (существует ряд его модификаций) и определяется формулой

$$D = \min_{i,j \in \{1 \dots c\}, i \neq j} \left\{ \frac{d(c_i, c_j)}{\max_{k \in \{1 \dots c\}} \text{diam}(c_k)} \right\}, \quad (3)$$

где  $d$  — расстояние между кластерами  $c_i$ ,  $c_j$ ;  $\text{diam}(c_k)$  — максимальное расстояние между элементами одного кластера.

Силуэт всей кластерной структуры (Silhouette Width Criterion — SWC) определяется по формуле

$$swc = \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} S_{xj}, \quad (4)$$



как деленная на количество элементов в кластеризуемом множестве  $N_x$  сумма Силуэтов каждого отдельного элемента, определяемых по формуле

$$S_{xj} = \frac{b_{pj} - a_{pj}}{\max(a_{pj}, b_{pj})}, \quad (5)$$

где  $a_{pj}$  — среднее расстояние от объекта до других объектов своего кластера,  $b_{pj}$  — среднее расстояние от объекта до других объектов ближайшего другого кластера.

Для Силуэта (4)–(5), как и для индекса Данна (3), выполняется правило: чем выше качество кластеризации при данном числе кластеров, тем больше значение индекса.

## 5. Метод оценки статистической значимости кластеризации

Опишем применяемый в данной статье алгоритм оценки достоверности кластеризации посредством методов Монте-Карло. Генерируются псевдовыборки для имитации  $Ln(Y)$ ,  $Ln(I)$ ,  $Ln(L)$  (независимо друг от друга). Они соответствуют двум вариантам нулевой гипотезы об отсутствии кластеризации, или, что то же самое, о существовании одного единственного кластера. Используется 2 варианта генерации псевдовыборок с длиной рядов, равной длине рядов используемых реальных данных (по 5000 псевдовыборок):

1) ряды, определяемые формулой:

$$x_t = e_t, \quad (6)$$

где  $e_t$  — белый шум *iid* с нормальным распределением, длина рядов; средние значения и дисперсии реализаций процесса берутся равными усредненным по регионам значениям реальных исследуемых временных рядов признаков;

2) ряды, определяемые формулой:

$$x_{t+1} = x_t + e_{t+1}, \quad (7)$$

которые имеют свойство стохастической нестационарности, могут демонстрировать эффект ложной регрессии (*Granger*

and Newbold, 1974) и относятся к процессам случайного блуждания. Начальные значения для них генерируются из нормальных распределений со средними значениями и дисперсиями, равными усредненным средним значениям и дисперсиям по совокупностям реальных данных признаков регионов; длина рядов и дисперсии приращений равны соответствующим усредненным по регионам значениям для реальных рядов признаков; среднее значение приращений равно нулю. Случайные блуждания по результатам ряда исследований, например (Nelson and Plosser, 1982), значительно лучше описывают многие временные ряды экономических данных, чем стационарные процессы типа белого шума.

Полученные псевдовыборки, как и реальные данные, исследуются описанными выше методами оценки качества кластеризации.

Для каждого из описанных вариантов кластеризации в результате расчетов получены графики зависимости значений используемых индексов оценки качества кластеризации от предполагаемого числа кластеров.

На каждом графике зависимости индекса от числа кластеров откладывается по 7 типов данных: медианы значений индексов и границы их доверительных интервалов на уровне 5% для симуляций белым шумом и случайными блужданиями, а также индексы, соответствующие реальным данным.

Достоверность кластеризации оценивается сравнением значений индексов реальных данных с соответствующими квантилями индексов из используемых псевдовыборок. Например, если индексы реальных данных больше по величине, чем индексы, соответствующие 95%-ным квантилям псевдовыборок, кластеризация принимается достоверной на уровне  $p = 0,05$ .

## 6. Результаты расчетов

### 6.1. Визуализация используемых данных

Поскольку используемое признаковое пространство имеет всего три измерения, кластерная структура в нем может быть легко оценена непосредственной визуализацией. На рис. 1 изображены три проекции набора значений показателей для всех регионов за все рассматриваемые годы (левые графики), а также три проекции набора значений показателей всех регионов, усредненных по используемому временному интервалу (правые графики).

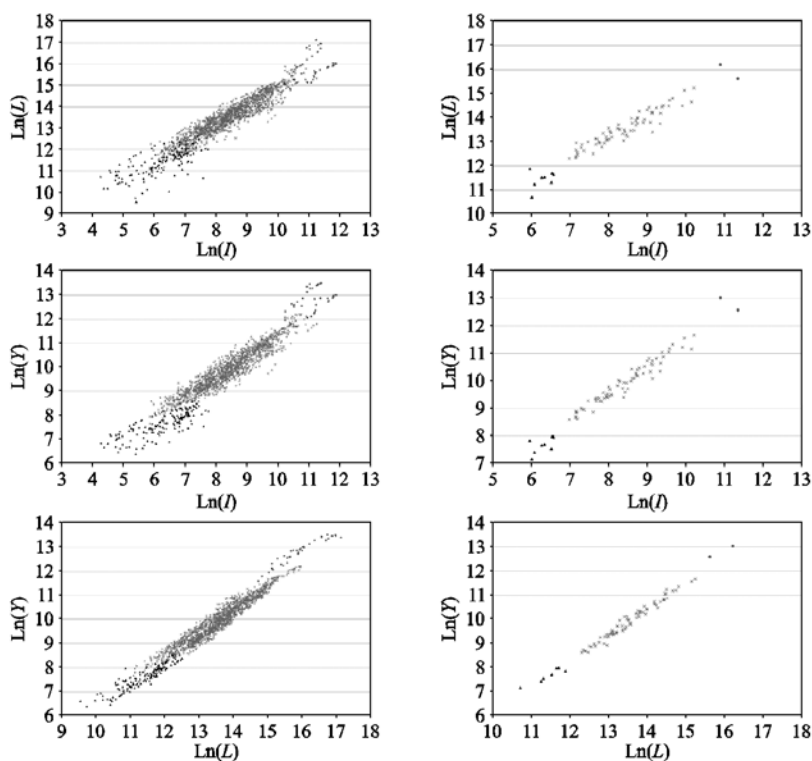


Рис. 1. Визуализация кластерной структуры российских регионов в пространстве признаков  $\text{Ln}(Y)$ ,  $\text{Ln}(I)$ ,  $\text{Ln}(L)$  с одним из вариантов разбиения на 3 кластера, обозначенных символами разных цветов

Как видно из рис. 1, данные расположены на всех графиках вдоль наклонных прямых (что обусловлено существенной корреляцией между рассматриваемыми признаками). При этом визуально можно выделить подгруппы точек, расположенных несколько обособленно от остальных и воспринимаемых субъективно как кластеры. Оценим качество кластеризации с помощью вычисления индексов реальных данных и сравнения их с индексами симуляций. Результаты этой оценки приводятся ниже.

### 6.2. Кластеризация по расстояниям, вычисленным по формуле (1)

На рис. 2 изображена зависимость значений индекса Данна от предполагаемого числа кластеров. Приводятся результаты только для методов average и complete, поскольку для метода single каких то качественно новых эффектов не выявлено.

На рис. 2 и на подобных рисунках ниже слева приведены результаты расчета методом average, справа – методом complete.

На рис. 2 и на последующих рисунках приняты следующие символичные обозначения:

▲ – 250-е по рангу (т. е. 95%-ные квантили), 2500-е по рангу (т. е. медианные) и 4750-е по рангу (т. е. 5%-ные квантили) значения индекса оценки качества кластеризации для симуляции по формуле (6);

× – 250-е по рангу, 2500-е по рангу и 4750-е по рангу значения индекса оценки качества кластеризации для симуляции по формуле (7);

● – реальные значения индекса.

Из рис. 2 видно, что значения индекса Данна, за исключением соответствующих самым малым  $N$ , возрастают для всех типов данных с ростом числа кластеров. Для метода average сильнее выражено нарушение монотонности роста индекса при малых  $N$ . Значения индекса для симуляций по форму-

лам (6) и (7) почти сливаются на обоих графиках. Значения индекса для реальных данных нигде не расположены выше верхних границ доверительного интервала имитируемых. Однако в данном случае это не должно восприниматься как однозначное свидетельство того, что кластеризации данных нет. Для индекса Данна существуют примеры, когда он не различает четко выделяемые визуально, но слишком близко друг к другу расположенные кластеры.

На рис. 3 изображена зависимость значений индекса Силуэт от предполагаемого числа кластеров. Видны те же закономерности, что и для индекса Данна: постепенный рост значения индекса, за исключением самых малых  $N$ , слияние

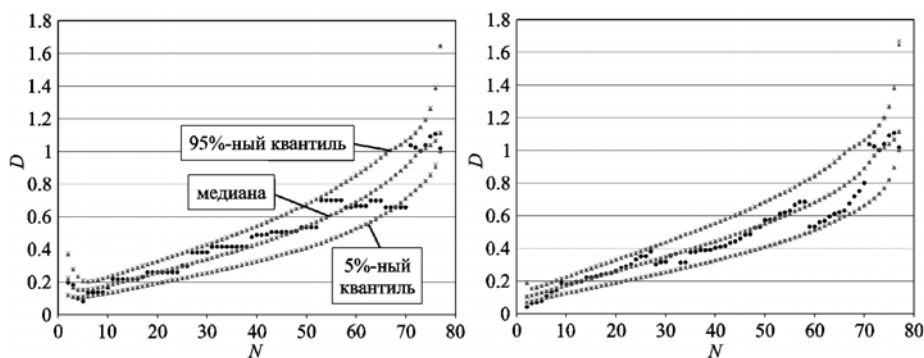


Рис. 2. Зависимость индекса Данна от числа выделенных кластеров для случая кластеризации с использованием дистанций (1)

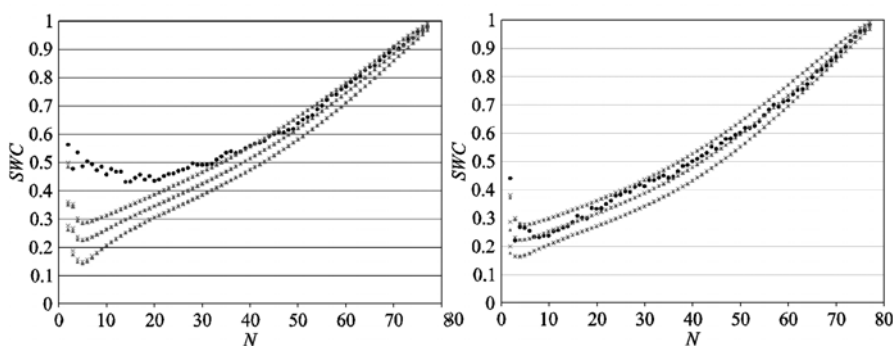


Рис. 3. Зависимость индекса Силуэт от числа выделенных кластеров при кластеризации с использованием дистанций (1)

значений для симуляций по формулам (6) и (7). Отличием от результатов для индекса Данна является то, что Силуэт, особенно в случае применения метода average, показывает существенно лучшую достоверность кластеризации реальных данных в области малого числа кластеров.

### 6.3. Кластеризация по дистанциям, вычисленным по формуле (2)

В данном случае расстояния между реальными временными рядами существенно отличаются как от дистанций для симуляций (6), так и от дистанций для симуляций (7), что видно на рис. 4.

На рис. 4 изображены ранговые распределения расстояний между трехкомпонентными временными рядами, рассчитанных по формуле (2) для следующих видов данных (перечисляются в порядке расположения у оси ординат сверху вниз): реальные данные, симуляции по формуле (7), симуляции по формуле (6). Из рис. 4 видно, что распределение для реальных данных существенно отличается не только от распределения для симуляций (6), но и от распределения для симуляций (7), занимающих промежуточное положение по разбросу значений.

В отличие от графиков симуляций на рис. 2, 3 на рис. 5 значения индекса Данна для симуляций (6) и (7) четко разделены между собой. Из рис. 5 видно, что кривая значений индекса для реальных данных лежит намного ближе к кривым, полученным для симуляций (7), чем к кривым, полученным для симуляций (6), хотя в значительном числе случаев ниже 5%-ного квантиля симуляций (7).

На рис. 6 изображена зависимость значений индекса Силуэт от предполагаемого числа кластеров для варианта кластеризации с использованием дистанций (2). Оба графика демонстрируют достоверную кластеризацию при малых  $N$ . Неожиданным является то, что в отличие от случая, представленного на рис. 5, индексы для случайных блужданий расположены выше, чем индексы для белого шума. Это

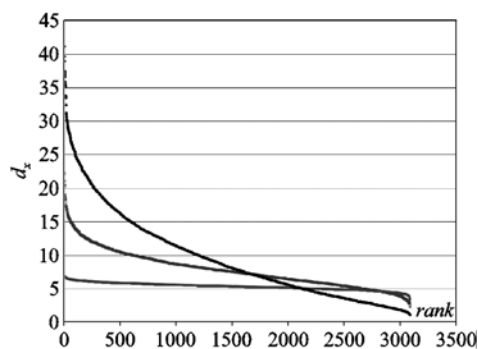


Рис. 4. Ранговые распределения дистанций  $d_x$ , вычисленных по формуле (2)

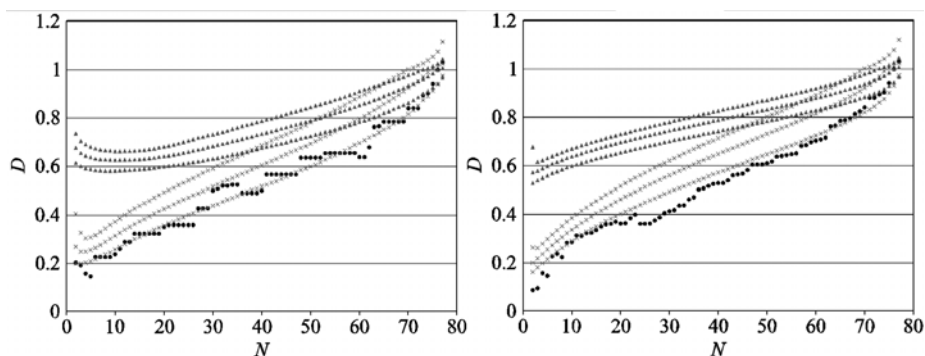


Рис. 5. Зависимость индекса Данна от числа выделенных кластеров при кластеризации с использованием дистанций (2)

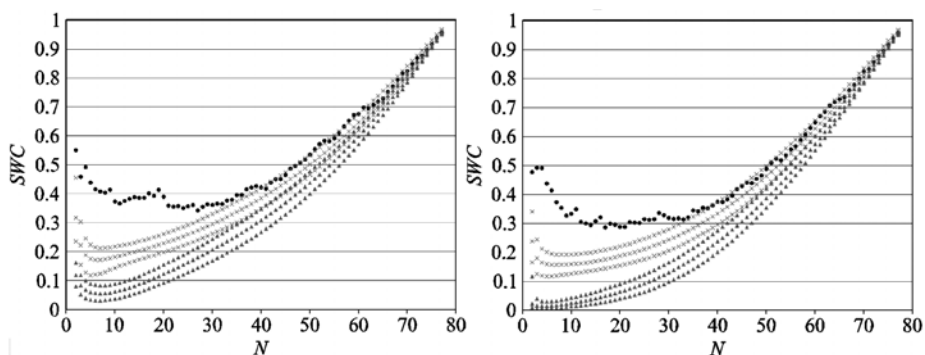


Рис. 6. Зависимость индекса Силуэт от числа выделенных кластеров при кластеризации с использованием дистанций (2)

демонстрирует, что применение индексов качества кластеризации к слабо кластеризованным временным рядам и панельным данным требует определенной осторожности, поскольку поведение индексов в этом случае может иметь нетривиальные особенности, не имеющие отношения к их предназначению оценивать качество кластеризации.

#### 6.4. Соотнесение регионов с кластерами

Для всех описанных выше вариантов кластеризации проверялось, как регионы распределяются по двум и по трем кластерам. Получены следующие результаты.

При делении на 2 кластера везде выделяются Москва и Тюменская область, которым соответствуют две относительно отдаленные от остальных точки в верхних левых частях графиков на рис. 1. Однако в случаях с использованием метода complete алгоритм добавляет в их кластер дополнительные регионы.

Для случая, рассчитанного по формуле (1), это Краснодарский край, Красноярский край, Московская область, Санкт-Петербург, Свердловская область, Республика Татарстан.

Для случая, рассчитанного по формуле (2), дополнительно к восьми регионам предыдущего случая в кластер добавляются Архангельская область, Республика Башкортостан, Челябинская область, Хабаровский край, Иркутская область, Республика Саха (Якутия), Кемеровская область, Республика Коми, Ленинградская область, Нижегородская область, Новосибирская область, Омская область, Оренбургская область, Пермский край, Приморский край, Ростовская область, Сахалинская область, Самарская область, Саратовская область, Ставропольский край, Волгоградская область, Вологодская область, Воронежская область.

При делении на 3 кластера появляется кластер из регионов, находящихся в нижней левой части графиков на рис. 1. Он общий для всех использованных вариантов кластериза-



ции. В него входят следующие регионы: Республика Адыгея, Республика Алтай, Чукотский автономный округ, Еврейская автономная область, Республика Ингушетия, Республика Калмыкия, Карачаево-Черкесская Республика, Республика Тыва.

Таким образом, результаты, полученные с использованием формул (1) и (2), различаются между собой только при применении метода complete. Метод complete выделяет 2 кластера существенно иначе, чем методы single и average.

Во всех случаях построение графиков визуально подтвердило адекватность кластеризации. То есть, даже когда достоверность кластеризации не подтверждаются индексами (в исследуемом нами случае — индексом Данна), распределение регионов по кластерам в основном может быть признано адекватным.

## 7. Заключение

В результате исследования качества агломеративной иерархической кластеризации панельных данных, характеризующих производственные процессы в регионах Российской Федерации, рядом альтернативных способов выявлено, что вычисляемая степень достоверности кластеризации существенно зависит от используемых индексов, выбора типа дистанций и методов вычисления расстояния между кластерами. Сформулируем наиболее значимые, по нашему мнению, выводы с рекомендациями для дальнейших исследований.

- При работе с панельными данными часто не учитывается возможность их кластерной структуры. Однако игнорирование кластерной структуры может приводить к существенным искажениям при эконометрическом моделировании.
- При обработке данных следует не только выяснять оптимальное разбиение их на кластеры, но и устанавливать его достоверность.
- Целесообразно использовать набор различных индексов оценки качества кластеризации, а не ограничи-

ваться каким-то одним индексом, чтобы не прийти к ложным обобщениям в выводах.

- При выборе нулевых гипотез для проверки качества кластеризации временных рядов нужно учитывать факт их (не) стационарности, подбирать нулевые гипотезы об отсутствии кластеризации, соответствующие природе исследуемых временных рядов. Нестационарность временных рядов может приводить не только к ложной регрессии, исследуемой авторами, например, в (Кирилюк и Сенько, 2020), но и к ложной кластеризации. Незнание проблемы ложной регрессии (Granger and Newbold, 1974) до исследований К. Грэнджера приводило к бесчисленным фэйковым результатам. Использование дополнительных методов верификации позволило ограничить поток подобных «результатов». Учет возможности ложной кластеризации должен повысить научную значимость кластерного анализа как доказательного метода исследования. В настоящее время это преимущественно разведывательный метод.
- При этом Силуэт и индекс Данна дают разные ответы на вопрос о том, что обладает большей кластеризацией – набор реализаций белого шума (6) или случайных блужданий (7). Это свидетельствует, на наш взгляд, об определенной условности интуитивного понятия выраженности кластеризации в случаях, когда эта выраженность слаба. Для данных с сильнее выраженной кластеризацией, что соответствует, например, значительному превышению расстояний между кластерами над их характерными размерами, оба индекса в наших расчетах давали ожидаемые пики, соответствующие объективному числу кластеров.
- С помощью индексов кластеризации можно оценить не только качество кластеризации проверяемого набора временных рядов, но и степень его соответствия альтернативным нулевым гипотезам (напри-

мер, сделать предположение о том, стационарны ли ряды).

- Исследованный набор данных по свойствам значимо отличается и от типичных реализаций белого шума (6) и от типичных реализаций случайных блужданий (7).
- Использование индекса Силуэт подтверждает достоверное наличие разбиения регионов на несколько кластеров, которое также можно оценить визуально. Поэтому, на наш взгляд, можно говорить о наличии кластерной структуры, хотя и не сильно выраженной, для рассматриваемой совокупности признаков, характеризующих производственные процессы в регионах Российской Федерации.

Представляет интерес продолжить исследования с использованием описанного в статье подхода с совместным применением большего числа индексов оценки качества кластеризации, других наборов признаков, в том числе многомерных, где проверка выраженности кластеризации посредством визуальной оценки затруднительна.

Все расчеты, результаты которых используются в данной статье, проведены с применением языка R, в частности пакетов *NbClust* (Charrad et al., 2014) и *TSclust* (Montero and Vilar, 2014).

#### ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 41. С. 24–46.
2. Aivazyan S.A., Afanas'ev M.Yu., Kudrov A.V. Metod klasterizatsii regionov RF s uchetom otraslevoi struktury VRP [The method of clustering regions of the Russian Federation taking into account the sectoral structure of the GRP] // Prikladnaya ekonometrika [Applied econometrics]. 2016. Vol. 41. Pp. 24–46 (in Russian).
3. Бахитова Р.Х., Ахметшина Г.А., Лакман И.А. Панельное моделирование объема выпуска продукции для регионов России // Управление большими системами. 2014. Т. 50. С. 99–109.
4. Bakhitova R.Kh., Akhmetshina G.A., Lakman I.A. Panel'noe modelirovanie ob"ema vypuska produktsii dlya regionov Rossii [Panel modeling

- of output for regions of Russia] // Upravlenie bol'shimi sistemami [Large-scale systems control]. 2014. Vol. 50. Pp. 99–109 (in Russian).
5. Ивахненко А.А., Каневский Д.Ю., Рудева А.В., Стрижов В.В. Выявление групп объектов, описанных набором многомерных временных рядов // Математические методы распознавания образов. 2007. Т. 13 (1). С. 134–137.
6. Ivakhnenko A.A., Kanevskii D.Yu., Rudeva A.V., Strizhov V.V. Vyyavlenie grupp ob"ektov, opisannykh naborom mnogomernykh vremennykh ryadov [Identification of groups of objects described by a set of multidimensional time series] // Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov [Mathematical methods for pattern recognition]. 2007. Vol. 13 (1). Pp. 134–137 (in Russian).
7. Кирилюк И.Л., Сенько О.В. Выбор моделей оптимальной сложности методами Монте-Карло (на примере моделей производственных функций регионов Российской Федерации) // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 111–118.
8. Kirilyuk I.L., Sen'ko O.V. Vybore modelei optimal'noi slozhnosti metodami Monte-Karlo (na primere modelei proizvodstvennykh funktsii regionov Rossiiskoi Federatsii) [Selection of optimal complexity models by methods of nonparametric statistics (on the example of production function models of the regions of the Russian Federation)] // Informatika i ee primeneniya [Informatics and Applications]. 2020. Vol. 14. Iss. 2. Pp. 111–118 (in Russian).
9. Магоматов Н.С., Шамилев С.Р. Анализ динамики ВРП регионов РФ производственными функциями // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6.
10. Magomadov N.S., Shamilev S.R. Analiz dinamiki VRP regionov RF proizvodstvennymi funktsiyami [Analysis of the dynamics of GRP of the regions of the Russian Federation by production functions] // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya [Modern problems of science and education]. 2014. No. 6 (in Russian).
11. Нижегородцев Р.М., Горидько Н.П. Инновационные факторы экономического роста регионов России: кластерный анализ // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 6088–6093.
12. Nizhegorodtsev R.M., Gorid'ko N.P. Innovatsionnye faktory ekonomicheskogo rosta regionov Rossii: klasternyi analiz [Innovative factors of economic growth in the regions of Russia: cluster analysis] // Trudy XII Vserossiiskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU-2014, Moskva) [Proceedings of XII All-Russian Conference on Control Problems]. Moscow: ICS RAS, 2014. Pp. 6088–6093 (in Russian).

13. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2017 // Стат. сб. / Росстат. М., 2017.
14. Regiony Rossii. Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli [Regions of Russia. Socio-economic indicators]. 2017 // Stat. sb. / Rosstat. Moscow, 2017 (in Russian).
15. Сибукаев Э.Ш. Изучение регионов России посредством иерархического метода кластерного анализа и данных о производстве // Университетская наука. — 2019. № 2 (8). С. 86–93.
16. Sibukaev E.Sh. Izuchenie regionov Rossii posredstvom ierarkhicheskogo metoda klasterного analiza i dannykh o proizvodstve [Study of Russian regions by means of hierarchical method of cluster analysis and production data] // Universitetskaya nauka [University science]. 2019. No. 2 (8). P. 86–93 (in Russian).
17. Сивоголовко Е.В. Методы оценки качества четкой кластеризации // Компьютерные инструменты в образовании. 2011. № 4. С. 14–31.
18. Sivogolovko E.V. Metody otsenki kachestva chetkoi klasterizatsii [Hard clustering validation methods] // Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii [Computer tools in education]. 2011. No. 4. P. 14–31 (in Russian).
19. Aghabozorgi S., Shirkhorshidi A.S., Wab T.Y. Time-series clustering – A decade review // Information Systems. 2015. Vol. 53. Pp. 16–38. DOI: 10.1016/j.is.2015.04.007.
20. Charrad M., Ghazzali N., Boiteau V., Niknafs A. NbClust: An R Package for Determining the Relevant Number of Clusters in a Data Set // Journal of Statistical Software. 2014. Vol. 61. No. 6. Pp. 1–36. DOI: 10.18637/jss.v061.i06.
21. Dunn J. Well Separated Clusters and Optimal Fuzzy Partitions // Journal Cybernetics. 1974. Vol. 4. No. 1. Pp. 95–104. DOI: 10.1080/01969727408546059.
22. Giancarlo R., Ulro F. Algorithmic paradigms for stability-based cluster validity and model selection statistical methods, with applications to microarray data analysis // Theoretical Computer Science. 2012. Vol. 428. Pp. 58–79. DOI: 10.1016/j.tcs.2012.01.024.
23. Gordon A.D. Null Models in Cluster Validation // Gaul W., Pfeifer D. (eds) From Data to Knowledge. Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization. New York: Springer, 1996. Pp. 32–44. DOI: 10.1007/978-3-642-79999-0\_3.
24. Granger C.J., Newbold P. Spurious regressions in econometrics // Journal of Econometrics. 1974. Vol. 2. Pp. 111–120. DOI: 10.1002/9780470996249.ch27.

25. Halkidi M., Batistakis I., Vazirgiannis M. On Clustering Validation Techniques // Journal of Intelligent Information Systems. 2001. Vol. 17. No. 2/3. Pp. 107–145. DOI: 10.1023/A:1012801612483.
26. Kapetanios G. Cluster analysis of panel data sets using non-standard optimisation of information criteria // Journal of Economic Dynamics and Control. 2006. Vol. 30. No. 8. Pp. 1389–1408. DOI: 10.1016/j.jedc.2005.05.010.
27. Liao T.W. Clustering of time series data – a survey // Pattern Recognition. 2005. Vol. 38. No. 11. Pp. 1857–1874. DOI: 10.1016/j.patcog.2005.01.025.
28. Montero P., Vilar J. A. *TSclust*: An R Package for Time Series Clustering // Journal of Statistical Software. 2014. Vol. 62. No. 1. Pp. 1–43. DOI: 10.18637/jss.v062.i01.
29. Nelson Ch.R., Plosser C.I. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications // Journal of Monetary Economics. 1982. Vol. 10. Pp. 139–162. DOI: 10.1016/0304-3932(82)90012-5.
30. Niu J.H. The Cluster Analysis of Multivariable Panel Data and Its Application // Applied Mechanics and Materials. 2012. Vols. 220–223. Pp. 2668–2671. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.220-223.2668.
31. Rousseeuw P. Silhouettes: A Graphical Aid to the Interpretation and Validation of Cluster Analysis // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1987. Vol. 20. Pp. 53–65. DOI: 10.1016/0377-0427(87)90125-7.

## 4.2. МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ И РЕГУЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ФИНАНСОВОГО СЕКТОРА В РОССИИ И В МИРЕ

*Кирилюк И.А.*

Вестник Института экономики Российской академии наук.

2020. № 4. С. 152–165.

DOI: 10.24411/2073-6487-2020-10048.

JEL: C10, C80, E42.

В статье рассматриваются различные возможности применения методов искусственного интеллекта, получения и обработки больших массивов данных, построения моделей в финансовом секторе, в деятельности центральных банков, проблемы, которые при этом возникают. Обсуждаются особенности нормативного регулирования в этой области, влияние финансовых технологий на перспективы трансформации отрасли.

**Ключевые слова:** Банк России, кредитно-денежная политика, финтех, искусственный интеллект, машинное обучение, большие данные.

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 20-510-00009 Бел\_а «Трансформация системы монетарного регулирования России и Беларуси в условиях цифровизации экономики».

### METHODS OF DATA MINING AND REGULATION OF THE DIGITAL TRANSFORMATION OF THE FINANCIAL INDUSTRY IN RUSSIA AND IN THE WORLD

The article discusses various possibilities of using artificial intelligence methods, obtaining and processing big data, modeling for the financial sector, for central banks, and related problems. The features of normative regulation in this area, the influence of financial technologies on the prospects for the transformation of the industry are discussed.

**Keywords:** Bank of Russia, monetary policy, fintech, artificial intelligence, machine learning, big data.

## 1. Введение

В настоящее время так называемые технологии Big Data — получения и обработки больших массивов данных — применяются многими коммерческими банками в России и за рубежом, центральными банками разных стран (*Chakraborty and Joseph, 2017; The use of big...*, 2019), и Банку России, для того, чтобы достойно выглядеть в такой конкурентной среде, нужно прилагать усилия в освоении новейших методов анализа и обработки больших объемов данных.

Еще в 70-х годах XX в. происходили попытки применять методы искусственного интеллекта в экономике, в том числе, в банковском деле. В СССР разработками методов интеллектуального анализа данных активно занимались в институтах Академии наук (например, в Вычислительном центре, в Институте проблем управления и т. д.). Во второй половине XX в. советским кибернетиком академиком В. Глушковым продвигался проект «Общегосударственная автоматизированная система учета и обработки информации» — ОГАС (*Глушков, Валах, 1981*), который предполагал централизованный сбор данных, характеризующих экономику страны, активное использование математики, статистики, искусственного интеллекта в управлении народным хозяйством по единым стандартам. Проект не был воплощен в том масштабном виде, в котором предлагался инициаторами, но его методология оказала заметное влияние на организацию экономики страны. В Чили подобный проект, называемый Киберсин, играл определяющую роль в период правления Сальвадора Альенде с 1970 по 1973 гг. Проектом руководил один из крупнейших специалистов по системному анализу, автор «модели жизнеспособной системы» Стаффорд Бир (*Beer, 1972*). Проект прервался в связи с государственным переворотом, но некоторый позитивный опыт за время его существования был получен. Концепции, лежащие в основе ОГАС и Киберсин, не получили в достаточной степени воплощение в тот период, когда они были предложены, прежде всего потому, что вошли в кон-



фликт с традиционными социальными институтами. В США подобные идеи по управлению обществом при помощи искусственного интеллекта популяризовал, например, футуролог Жак Фреско. Перечисленные проекты предполагают не только исследование экономики посредством математического моделирования, но и непосредственное влияние математических моделей и расчетов на функционирование экономики. Они дали интересный опыт, который стоило бы не забывать и развивать и в настоящее время, но вспоминают о них не часто. Очевидно это связано с тем, что данные проекты разрабатывались для плановой, социалистической экономики, а в настоящее время доминирует экономика рыночная.

Однако в последние десятилетия и в странах с рыночной экономикой интерес к использованию искусственного интеллекта в управлении постоянно возрастает. Исследованиями и разработками в этом направлении активно занимаются коммерческие структуры, в частности, банки и компании в области информационных технологий. Все большее внимание этой теме уделяют государственные финансовые организации, в том числе, Банк России, выпуская аналитические обзоры по этой теме, например, (*Обзор регулирования...*, 2017). Тем не менее, накопление и обработка данных в настоящее время существенно менее централизованы, чем это предлагалось в рамках проектов ОГАС и Киберсин.

Далее будут описаны особенности работы с большими данными в финансовой отрасли, модели и методы обработки данных с использованием технологий искусственного интеллекта, направления их применения, возникающие при этом проблемы и риски, возможные пути решения проблем, а также особенности государственного регулирования в этой области.

## **2. Накопление, хранение и инструменты обработки данных**

Коммерческие банки накапливают существенно большее количество данных по сравнению со многими другими видами организаций, в том числе, по сравнению с другими финансо-

выми организациями, такими, как некредитные финансовые организации и стартапы в области финансовых технологий (финтеха). И они заинтересованы в обработке этих данных, в первую очередь с целью обеспечения своей устойчивости и получения прибыли.

По данным ведущего поставщика информации и консультационных услуг на рынке ИТ, телекоммуникаций и потребительской техники International Data Corporation (IDC) доходы от решений для больших данных и бизнес-аналитики будут расти в течение периода прогноза на 2018–2022 гг. с пятилетним совокупным годовым темпом роста в размере 13,2%. IDC ожидает, что к 2022 г. выручка от этого направления по всему миру составит 274,3 млрд долл. (*IDC Forecasts...*, 2019).

Существуют также оценки и прогнозы развития рынка больших данных (Big Data) для России. По информации Анны Серебряниковой, президента Ассоциации участников рынка больших данных (АБД), на март 2019 г. по разным оценкам, он составлял от 10 до 30 млрд руб. К 2024 г. объем достигнет 300 млрд руб., согласно прогнозу Ассоциации, а рост выручки всех индустрий в России за счет использования больших данных за этот период может достичь 0,5–1,5% ВВП (*Березина, 2019*).

Задача извлечения пользы из данных не является тривиальной. Они могут сохраняться как для вычислений, значение результатов которых для выработки стратегии банков уже понятно, так и на тот случай, если полезность этих данных станет понятна позднее. При этом важно, чтобы прибыль от применения полезных на данный момент данных окупала бы с избытком затраты на хранение остальных. Кроме того, для получения адекватной информации из данных должен выполняться ряд требований к их качеству: например, данные должны иметь приемлемую точность, быть достоверными, актуальными, доступными для обработки.

Согласно (*Reinsel et al., 2018*) объем накапливаемых человечеством больших данных растет экспоненциально и в период 2018–2025 гг. должен увеличиться с 33·10<sup>21</sup> до

175·1021 байт. Стоимость хранения данных постоянно снижается, при этом растет частота взаимодействия клиентов с банками, что увеличивает скорость накопления финансовых данных. Короткий (пока) период их интенсивного накопления затрудняет анализ долгосрочной экономической динамики с их использованием. Традиционные экономические модели разрабатывались и верифицировались с учетом использования на относительно малых наборах данных, но теперь ситуация существенно меняется, растет потребность в моделях, описывающих большие наборы данных.

Возможность накапливать большие данные зависит не только от уровня технологий, но и от численности населения стран, а также от количества клиентов организаций. Поэтому, например, Китаю, население которого почти в 10 раз больше, чем население России, легче быть в числе лидеров в этом процессе. Важным фактором является уровень понимания населением ценности данных. Поскольку финансовые организации заинтересованы в получении не только внутренних, но и внешних данных, формируется рынок продажи и обмена данными. Количество и разнообразие получаемых данных также увеличивается при развитии на базе банков экосистем с разнообразными дополнительными сервисами. Это позволяет банкам иметь дело с актуальными данными, поскольку в развивающейся мировой экономике постоянно происходят изменения, и важно делать модели с учетом наиболее свежих данных.

Накапливать данные в настоящее время существенно проще, чем их обрабатывать. Объем накапливаемых данных растет более быстрыми темпами, чем производительность процессоров. Обработка больших объемов данных, или применение таких часто требовательных к вычислительным ресурсам методов, как, например, методы Монте-Карло, широко используемые в рамках машинного обучения, и предполагающие генерацию большого числа симулированных данных, иногда требуют проведения параллельных вычислений на суперкомпьютерах.

Для ускорения выполнения определенных математических задач могут быть полезны вычисления с помощью интегральных микросхем с особыми специализированными архитектурами (application-specific integrated circuit – ASIC). Эти специализированные микросхемы могут решать меньшее число задач, чем обычные компьютеры, но решают их существенно быстрее. Наиболее известно использование таких микросхем для майнинга криптовалют, однако, этой сферой их применение далеко не ограничивается. Например, Google разрабатывает ASIC для задач машинного обучения (Ализар, 2017).

### 3. Модели, применяемые в финансовой отрасли, и машинное обучение

В настоящее время в финансовой отрасли (в том числе Центральными банками) используется разнообразный математический аппарат. Широко распространенными моделями являются динамические стохастические модели общего равновесия (для их обозначения часто используется английская аббревиатура DSGE). Они базируются на принципах микроэкономической теории и в состоянии учесть рациональные ожидания экономических агентов относительно будущего развития экономики. С ними конкурируют эконометрические модели векторной авторегрессии (обозначающиеся также английской аббревиатурой VAR). Кроме того, применяется имитационное моделирование (Salle, et al., 2013). Наличие множества альтернативных подходов обусловлено тем, что макроэкономические системы слишком сложны, чтобы надеяться их описать конкретной моделью, например, DSGE настолько же точно, насколько например механика описывает движение космических кораблей. Четкой границы между машинным обучением и другими подходами нет, возможны комбинированные варианты применения разных подходов.

Машинное обучение возникло на базе синтеза методов математической статистики и математической теории оптимизации. Это направление в рамках теории искусственного

интеллекта, описывающее модели, способные обучаться на данных. Считается, что методы машинного обучения имеет смысл применять в тех случаях, когда не известны достаточно точные теоретически обоснованные модели, описывающие изучаемые процессы. При этом применимость этих методов универсальна. Они используют как строго обоснованные математические теории, так и эвристические приемы. Наиболее известным направлением в рамках машинного обучения являются нейросети. Популярным в последние годы является глубокое обучение, основанное на использовании особых многослойных нейросетей. Однако, нейросетями набор алгоритмов далеко не исчерпывается, и существуют методы, работающие в определенных ситуациях лучше нейросетей. Например, нейросети требуют для своего обучения достаточно больших объемов данных (как правило, не меньше тысяч примеров), если же доступные объемы недостаточно велики, применяются другие методы. Кроме того, недостаток нейросетей заключается в том, что, как правило, не ясно, каким образом их использование приводит к нужным результатам. Альтернативные же методы, например, метод, называемый «решающий лес», являются более интерпретируемыми.

Популярным подходом является использование для решения задач сразу нескольких альтернативных методов машинного обучения, или комбинирование их в более сложные алгоритмы для увеличения точности результатов. Даже на основе комбинации относительно слабых по точности алгоритмов можно создать достаточно точный алгоритм, если их ошибки слабо коррелируют между собой.

Создание алгоритмов машинного обучения само по себе является автоматизируемым процессом. Разработки в области автоматического машинного обучения (AutoML) осуществляет, например, компания Google (*Андерсон, 2020*).

#### **4. Модельные риски**

Рост популярности и сфер применения методов искусственного интеллекта при сложности соответствующей теории и дефиците квалифицированных специалистов уве-

личивает модельные риски — такие риски, которые непосредственно определяются применением математических алгоритмов. Характерной особенностью использования методов интеллектуального анализа данных является то, что они применяются специалистами в самых различных областях, но при этом требуют высокой квалификации и в области искусственного интеллекта, а также в области математической статистики и ряда других разделов математики, чтобы учесть все предпосылки, при которых возможно корректное использование каких-либо методов. Поэтому часто случается, что получаемые даже в научных публикациях результаты являются некорректными именно из-за некорректного использования математических методов. Рост популярности методов машинного обучения не только в науке, но и в бизнесе, увеличивает возможность возникновения информации, полученной в результате некорректных расчетов. Однако, наиболее успешные фирмы заинтересованы, и в состоянии нанимать для разработки алгоритмов и проведения нужных им вычислений высококвалифицированных специалистов.

Особенностью многих экономических, и финансовых показателей является то, что их распределения по величине существенно отличаются от нормального (гауссова) распределения, и порой проблематично установить конкретные аналитические формулы таких распределений. Увеличение вычислительных мощностей компьютеров позволило для таких случаев широко внедрить в практику методы непараметрической статистики, играющие существенную роль в машинном обучении. В тех же случаях, когда известно, что величины распределены по закону, достаточно хорошо аппроксимирующемуся нормальным, или другим известным распределением, лучше работают параметрические методы, использующие конкретные формы распределений. Однако нормальность распределений часто предполагается там, где она на самом деле не имеет места, или, по крайней мере, не доказана с нужным уровнем достоверности.

Особые сложности возникают, когда какие-либо показатели описываются распределениями, образно называемыми «распределениями с толстыми хвостами» (типичный представитель — распределение Ципфа–Парето), т. е. такими распределениями, для которых вероятность возникновения аномально отклоняющихся от типичных значений показателя высока, и ею нельзя пренебречь. Примером является распределение населения земли по доходам.

Одной из основных проблем в машинном обучении является переобучение, когда при избыточном количестве параметров модель начинает обучаться не на закономерностях, а на шуме. В задачах регрессии также надо учитывать явление мультиколлинеарности, когда часть признаков сильно коррелируют между собой, что уменьшает точность вычисления регрессионных коэффициентов. Кроме того, надо иметь в виду, что при большом количестве обрабатываемых данных увеличивается вероятность получения каких-либо аномалий, которые можно принять за закономерности, но на самом деле они являются артефактами (это называется проблемой множественного тестирования).

Чтобы уменьшить риски, применяемые методы сначала отрабатываются банками на таких задачах, где ошибки не могут привести к серьезным последствиям. Но постепенно происходит рост сложности задач, доверяемых искусственному интеллекту, что может повлечь обострение проблемы модельных рисков.

## **5. Применение технологий искусственного интеллекта в финансовой сфере**

Методы искусственного интеллекта и машинного обучения могут применяться для обработки самых различных типов данных. Например, в обработке текстов и голосовых сообщений при работе с клиентами, в обработке потоков цифровых данных о деятельности коммерческих банков. Искусственный интеллект используется финансовыми организациями в чат-

ботах, в кредитном скоринге (то есть, в оценке кредитоспособности клиентов), в контроле за наличием в банкоматах, в определении целесообразности открытия новых отделений и их оптимального расположения, в оценке деятельности сотрудников банков, при найме новых сотрудников, при биометрической идентификации клиентов, в борьбе с мошенничеством и т. д.

Распространено утверждение, что в банковском секторе искусственный интеллект может заменить только малоквалифицированные должности, тех, где не требуется принятие самостоятельных решений, однако, во-первых, в банках не слишком много реально креативной деятельности, во-вторых, уже сейчас, например, при скоринге искусственный интеллект принимает решения. С другой стороны, использование искусственного интеллекта создает дополнительные возможности для оппортунистического поведения сотрудников-людей, которые могут, например, отказывать в клиенту в обслуживании, ссылаясь на то, что так «решил» искусственный интеллект, даже когда это не является правдой, или когда в их власти принять решение самостоятельно.

Важным для коммерческих банков является развитие моделей прогнозирования отзывов лицензий центральными банками. Такие модели используются на практике также российским агентством по страхованию вкладов. В ранних работах для решения этих задач использовался линейный дискриминантный анализ. В основной массе известных автору работ применены панельные логит-модели, также применяются модели множественного выбора (*Пересецкий, 2010*). Однако в последние несколько лет появились работы, где задача решается с помощью более широкого спектра методов машинного обучения. Так, в (*Синельникова-Мурылева и др., 2018*) показано, что очень высокой прогнозной силой обладает так называемый алгоритм «случайного леса». В (*Zhuravlev et al., 2019*) применена технология вычисления коллективных решений по наборам алгоритмов распознавания. Наряду с логистической регрессией там используется алгоритм вычисления



оценок, три варианта «решающего леса» и метод статистически взвешенных синдромов. Разработанная в (*Zhuravlev et al.*, 2019) методология позволяет не только делать прогноз, но и выявлять показатели, наиболее тесно связанные с решением об отзыве лицензии.

Эффективная монетарная политика во многом обуславливается умением с высокой точностью предсказывать инфляцию. В последние несколько лет вышел ряд публикаций об использовании различных методов машинного обучения для прогнозирования инфляции (*Garcia et al.*, 2017; *Medeiros et al.*, 2019; *Yadav et al.*, 2019; *Байбуза*, 2018). Эти методы позволяют в частности учесть наличие нелинейных связей между переменными и инфляцией. Применение методов машинного обучения с использованием больших данных позволяет более детально понять, какие именно показатели в наибольшей степени обуславливают будущую инфляцию. Точность предсказания зависит как от используемой модели, так и от количества доступных данных, растущего, например, за счет того, что становится удобнее использовать интернет для отслеживания цен на товары в реальном времени. Можно прогнозировать инфляцию, исследуя поисковые запросы (*Петрова*, 2019). Показано, что применение некоторых методов машинного обучения увеличивает точность прогнозирования по сравнению с применением более традиционных методов. При этом эффективность методов может различаться для краткосрочного и долгосрочного прогнозирования, а также зависит от конкретного набора используемых данных.

## **6. Нормативное обеспечение работы с данными в финансовой отрасли**

Инновационная активность коммерческих банков определяется не только величинами процентных ставок, устанавливаемыми Центробанками, но также разного рода нормативными документами. Поскольку деньги играют основопо-

лагающую роль в функционировании и развитии общества, финансовая сфера на мировом уровне является одной из самых зарегулированных. Тем не менее, в настоящее время существует некоторый дефицит в стандартах и в законодательстве в области работы с данными, разработки и применения алгоритмов, поскольку это активно развивающееся направление. Существенной трудностью является то, что в новых отраслях финтеха нормативы различаются и по странам, и между организациями. При этом растет число международных транзакций.

Для работы с данными разрабатывается специальная стандартизованная методология. Широкой популярностью пользуется стандарт CRISP-DM. Он определяет не только методы моделирования, но и особенности понимания бизнес-целей, изучение и подготовку данных, оценку, внедрение результатов для увеличения эффективности компаний. Существуют и российские нормативные документы<sup>1</sup>, определяющие работу с данными применительно к финансовой сфере.

Процесс перехода от бумажной к цифровой документации медленный, накоплено большое количество бумажных документов, которые на практике затруднительно использовать. Стоит вопрос о целесообразности перехода от отчетности коммерческих банков на основе форм к отчетности на основе данных, что может увеличить доступ регуляторов к не агрегированным данным. Это может одновременно избавить коммерческие банки от чрезмерной бюрократической нагрузки и увеличить актуальность информации, которой располагают центробанки. Однако, при этом возникает вопрос о том, какие данные, алгоритмы являются интеллект-

---

1. В качестве норматива по работе с финансовыми данными, используемого в России, можно привести, например, Положение Банка России от 06.08.2015 № 483-П (ред. от 15.04.2020) «О порядке расчета величины кредитного риска на основе внутренних рейтингов» (вместе с «Требованиями к качеству данных, используемых банками для создания и применения моделей количественной оценки кредитного риска для целей расчета нормативов достаточности капитала») (зарегистрировано в Минюсте России 25.09.2015. №38996).

туальной собственностью коммерческих банков, которые они могут не раскрывать посторонним лицам, в том числе, регуляторам. При работе с данными остается открытым вопрос о том, где проходит граница таких понятий, как персональные данные, банковская тайна, тайна связи. Принадлежат ли анонимные данные социальных сетей, представляющие интерес для банков, пользователям или сетям? Особенно эта проблема касается биометрических данных, которые уже сейчас используются банками, получившими на это соответствующие лицензии.

В области использования искусственного интеллекта новой проблемой является ответственность за возникновение сбоев, аварий. Если аварийная ситуация возникла по причине применения технологий искусственного интеллекта, труднее определить виновных, чем в случаях, когда такие проблемы возникают непосредственно по вине человека. Для повышения его надежности при использовании, искусственный интеллект очевидно предпочтительно развивать, используя парадигму Open source, чтобы в его разработках могло участвовать больше специалистов. По этим же причинам целесообразно продвигать концепции открытых данных и размещения научных публикаций по рассматриваемым направлениям в открытом доступе.

Чтобы успешно регулировать деятельность финансовых организаций, центробанки должны отслеживать фактически в реальном времени данные и корректировать модели на их основании, поскольку темпы изменения факторов, влияющих на макроэкономику, в последние годы все более ускоряются. В новых моделях нужно учитывать развитие альтернативных банковскому способам кредитования. Велика вероятность, что в скором будущем существенную роль в экономике будут играть криптовалюты, что может ослабить возможности управления финансовой сферой для центральных банков, и к этим рискам нужно быть подготовленными.

Издавая законы и распоряжения, регулятору следует учитывать, что применение искусственного интеллекта в бан-

ковском секторе, финансовые технологии — направления относительно новые, еще не установившиеся, активно развивающиеся. Поэтому, целесообразно внимательно наблюдать за развитием этих направлений, не допуская при этом их чрезмерной зарегулированности. Понимая это, Банк России создал так называемую регулятивную песочницу, в рамках которой можно апробировать новые прогрессивные технологии без риска нарушений действующего законодательства и получения соответствующих санкций (при условии уведомления клиентов о рисках и ограничения этих рисков) (*Вопросы и направления...*, 2018).

## 7. Заключение

Не претендуя на полноту, кратко резюмируем значимые технические и социальные проблемы, возникающие в процессе разработки и применения технологий искусственного интеллекта в финансовой отрасли, а также возможные (с нашей точки зрения) способы их решения.

Проблемы, возникающие при разработке и использовании моделей:

- трудности получения полезных данных, часть из которых являются доступными лишь узкому кругу лиц (могут быть преодолены договоренностями о совместном использовании данных, выкладыванием данных в открытый доступ);
- слишком медленная скорость обработки накапливаемых данных (скорость можно увеличивать посредством применения распределенных вычислений, а также посредством разработки и использования микросхем типа ASIC, специализированных конкретно для задач финансовой отрасли);
- непрозрачность работы некоторых алгоритмов (характерна, например, для нейросетей), то есть, трудность в понимании того, как именно алгоритмы находят решение задач. Проблема может решаться

посредством разработки и использования при необходимости более прозрачных алгоритмов;

- недоступность исходного кода моделей по причинам проприетарности (решается переводом в модели в Open source, или созданием конкурирующих моделей);
- применение устаревших алгоритмов (решается сравнительными исследованиями эффективности алгоритмов, соревнованиями альтернативных алгоритмов в решении задач);
- некорректное применение алгоритмов, модельные риски (решается посредством выявления типовых ошибок и повышением грамотности исследователей). Здесь могут оказаться полезны заимствования опыта из других предметных областей, использующих интеллектуальный анализ данных, и математическую статистику. Например, В.П. Леоновым (Леонов, 2007) на основании 1562 источников (диссертаций, статей и т. д.) изучались типовые ошибки применения статистики в медицине, в результате чего им сделан вывод, что только около 10% клинической информации подвергается корректному статистическому анализу. В области экономики подобные исследования автором не найдены, хотя и представляются весьма актуальными.

Социальные и экономические проблемы, возникающие при внедрении технологий искусственного интеллекта:

- рост социальной неоднородности (обусловлено тем, что те, кто уже имеют данные и умеют зарабатывать на них проще могут получать дополнительные данные и финансы, чем те, кому приходится начинать с нуля). Аналогично: тот факт, что преимущества в доступе к данным, вычислительным мощностям и к алгоритмам имеют крупные компании, ставит под вопрос перспективы выживания существующих и появление новых малых компаний. Уменьшить проблему могут

- меры по государственной поддержке малых компаний, предоставление по возможности важных для их развития данных в открытый доступ;
- ответственность за аварии, произошедшие в системах, использующих технологии искусственного интеллекта (общего рецепта здесь, видимо, на данный момент нет, многое зависит от конкретных ситуаций, хотя развитие технологий в целом должно приводить к уменьшению аварийности);
  - нехватка квалифицированных специалистов в области интеллектуального анализа данных. В условиях дефицита квалифицированных кадров банки активно проводят конкурсы, соревнования по обработке данных, хакатоны с целью выявления специалистов и привлечения их к сотрудничеству. Очевидным способом решения проблемы является внедрение соответствующих дисциплин в образовательный процесс. Кроме того, развитие автоматизированного машинного обучения AutoML могло бы ослабить требования к квалификации сотрудников, работающих в области обработки данных. При этом, заменять многие функции, не требующие от человека особой квалификации, искусственный интеллект уже научился. Более того, существует тренд постепенного освоения им все более квалифицированной работы. Обсуждается даже перспектива замены центральных банков на системы искусственного интеллекта с соответствующими функциями (Дун, 2018);
  - рост безработицы из-за автоматизации процессов. Так, например, в Банке Америки сокращения к 2018 г. составили примерно треть сотрудников, около 100000 человек (Nugh, 2018). Частично проблема может быть решена посредством увеличения числа рабочих мест в специальностях, связанных с интеллектуальным анализом данных, поскольку востребованность специалистов в этой области в настоящее время велика;

- конкуренция банковского сектора с криптовалютами и с альтернативными формами финансовых организаций, со стартапами в области финтеха, с такими крупными компаниями, как Facebook, Google, Amazon, Apple и др. Одним из решений является создание банками экосистем. В Тинькофф-банке и Сбербанке на уровне руководства поднят вопрос о том, что есть резон отказаться от позиционирования себя в качестве банков, поскольку сфера их деятельности постепенно становится существенно более универсальной (Еремина, 2019).

Таким образом, развитие технологий искусственного интеллекта может качественно улучшить ситуацию в финансовой отрасли, но их разработка и внедрение требуют большой аккуратности. Сейчас намного более высокий уровень технологий, чем был в те времена, когда происходили попытки воплощения проектов ОГАС и Киберсин, гораздо выше скорость обработки данных, ниже стоимость их хранения, однако преимущества технологий искусственного интеллекта в управлении экономикой и финансами по прежнему используются далеко не в полной мере. В рамках рыночной экономики труднее реализовывать большие проекты объединенными в масштабах стран и мира силами, организации вынуждены решать проблемы, в том числе, возникающие при использовании технологий искусственного интеллекта, своими силами в конкурентной среде, и от государств требуется помощь в координации этих процессов для блага общества.

Автор выражает искреннюю благодарность д.э.н. С.А. Андриюшину, А.П. Свиридову, д.ф.-м.н. О.В. Сенько за полезные обсуждения.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Ализар А. Специализированный ASIC от Google для машинного обучения в десятки раз быстрее GPU. 2017. [habr.com/en/post/402955](https://habr.com/en/post/402955) (дата обращения: 01.06.2020).
2. Андерсон Дж. «Скайнет» уже рядом: Google создает искусственный интеллект, способный к самостоятельному развитию. 2020. [oko-planet.ru/science/scienceday/583845-skaynet-uzhe-ryadom-google-sozdaet-iskusstvennyy-intellekt-sposobnyy-ksamostoyatelnomurazvitiyu.html](https://oko-planet.ru/science/scienceday/583845-skaynet-uzhe-ryadom-google-sozdaet-iskusstvennyy-intellekt-sposobnyy-ksamostoyatelnomurazvitiyu.html) (дата обращения: 01.06.2020).
3. Байбуза И. Прогнозирование инфляции с помощью машинного обучения // Деньги и кредит. 2018. Декабрь. Т. 77. № 4. С. 42–59.
4. Березина Е. Рынок больших данных за пять лет вырастет в 10 раз. 2019. [rg.ru/2019/03/25/gynok-bolshih-dannyh-za-pyat-let-vyrastet-v-10-raz.html](https://rg.ru/2019/03/25/gynok-bolshih-dannyh-za-pyat-let-vyrastet-v-10-raz.html) (дата обращения: 01.06.2020).
5. Вопросы и направления развития регуляторных и надзорных технологий (RegTech и SupTech) на финансовом рынке в России. Доклад для общественных консультаций. Центральный банк Российской Федерации. 2018. Октябрь.
6. Глушков В.М., Валах В.Я. Что такое ОГАС? Серия: Библиотечка Квант. Вып. 10. М.: Наука, 1981.
7. Дун Хэ. Денежно-кредитная политика в цифровую эпоху. Из-за криптоактивов спрос на деньги центральных банков может однажды снизиться // Финансы и развитие. Международный валютный фонд, июнь 2018 г.
8. Еремина А. Сотрудники «Тинькофф банка» попросили не называть свое место работы банком. 2019. [www.vedomosti.ru/finance/articles/2019/06/16/804284-sotrudnikovtinkoff-banka](https://www.vedomosti.ru/finance/articles/2019/06/16/804284-sotrudnikovtinkoff-banka) (дата обращения: 01.06.2020).
9. Леонов В.П. Классификация ошибок применения статистики в отечественной медицине // Приложение к журналу «Информатика и системы управления». Материалы научной конференции «Системный анализ в медицине» (САМ 2007). 2007. № 1(13). С. 18–21.
10. Обзор регулирования финансовых рынков. №5. 18.11.2016–31.01.2017. Москва, Банк России.
11. Пересецкий А.А. Модели причин отзыва лицензий российских банков / Препринт #WP/2010/085. М.: Российская Экономическая Школа, 2010.
12. Петрова Д.А. Прогнозирование инфляции на основе интернет-запросов // Экономическое развитие России. Ноябрь 2019. Т. 26. № 11. С. 55–62.
13. Синельникова-Мурылева Е., Горшкова Т., Макеева Т. Прогнозирование дефолтов в российском банковском секторе // Экономическая политика, 2018. Т. 13. № 2. С. 8–27.



14. *Beer S.* Brain of the Firm; Allen Lane, The Penguin Press, London, Herder and Herder, USA, 1972.
15. *Chakraborty C., Joseph A.* Machine learning at central banks. Staff Working Paper. 2017. No. 674, September.
16. *Garcia M.G.P., Medeiros M.C., Vasconcelos G.F.R.* Real-time inflation forecasting with high-dimensional models: The case of Brazil // International Journal of Forecasting. Elsevier. 2017. Vol. 33(3). Pp. 679–693.
17. *Hugh Son.* Bank of America CEO Moynihan says he cut jobs equal to the workforce of Delta Air Lines. 2018. [www.cnbc.com/2018/10/17/bank-of-america-ceo-brian-moynihan-oncutting-100000-jobs.html](http://www.cnbc.com/2018/10/17/bank-of-america-ceo-brian-moynihan-oncutting-100000-jobs.html) (дата обращения: 01.06.2020).
18. IDC Forecasts Revenues for Big Data and Business Analytics Solutions Will Reach \$189.1 Billion This Year with Double-Digit Annual Growth Through 2022. April 04, 2019. [www.idc.com/getdoc.jsp?containerId=prUS44998419](http://www.idc.com/getdoc.jsp?containerId=prUS44998419) (дата обращения: 01.06.2020).
19. *Medeiros, M. C., Vasconcelos, G. F., Veiga, ., & Zilberman, E.* Forecasting Inflation in a Data-rich Environment: the Benefits of Machine Learning Methods // Journal of Business & Economic Statistics. 2019. Pp. 1–22.
20. *Reinsel D., Gantz J., Rydning J.* Data age 2025. The Digitization of the World. From Edge to Core. An IDC White Paper – #US44413318. 2018. [https://assets-global.website-files.com/5ecd514b143c3cedeach6071/5f57e24df0e2c0dd7cfb56d2\\_the-digitization-of-the-world.pdf](https://assets-global.website-files.com/5ecd514b143c3cedeach6071/5f57e24df0e2c0dd7cfb56d2_the-digitization-of-the-world.pdf) (дата обращения: 01.06.2020).
21. *Salle I., Yidizoglu M., Sénégas M.* Inflation targeting in a learning economy: An ABM perspective // Economic Modelling. 2013. August. 34. Pp. 114–128.
22. The use of big data analytics and artificial intelligence in central banking. IFC Bulletin No 50. May 2019. Proceedings of the IFC – Bank Indonesia International Workshop and Seminar on “Big Data for Central Bank Policies / Building Pathways for Policy Making with Big Data” Bali, Indonesia, 23–26 July 2018.
23. *Yadav O., Gomes C., Kanojiya A., Yadav A.* Inflation Prediction model using Machine Learning // International journal of information and computing science. May 2019. Vol. 6. Issue 5. Pp. 121–128.
24. *Zhuravlev Yu.I., Sen'ko O.V., Bondarenko N.N., Ryazanov V.V., Dokukin A.A., Vinogradov A.P.* A Method for Predicting Rare Events by Multidimensional Time Series with the Use of Collective Methods // Pattern Recognition and Image Analysis. 2019. Vol. 29. No. 4. Pp. 763–768.

### 4.3. МОДЕЛЬНЫЕ РИСКИ В ФИНАНСОВОЙ СФЕРЕ В УСЛОВИЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА И МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

*Кириллюк И.А.*

Russian Journal of Economics and Law. 2022.

T. 16. № 1. С. 40–50.

DOI: 10.21202/2782-2923.2022.1.40-50.

JEL: G1, G2, L86.

**Цель:** в рамках технологий RegTech и SupTech оценка трансформации модельных рисков и способов их минимизации при возрастании роли применения методов искусственного интеллекта. **Методы:** системный подход к анализу качества экономических моделей. Исторический, логический, статистический методы исследования.

**Результаты:** рассмотрен российский и зарубежный опыт учета модельных рисков в финансовой отрасли. Изучены теоретические и практические исследования по вопросам регулирования и управления модельными рисками в деятельности организаций финансового сектора. Определено место технологий машинного обучения и искусственного интеллекта при решении современных задач в работе и регулировании работы финансовых организаций. Рассмотрены основные модельные риски, а также направления изменения их специфики в результате развития технологий искусственного интеллекта, в первую очередь машинного обучения, и увеличения возможностей хранения и передачи большого количества данных. Рассмотрены основные методы обработки данных и построения моделей а также их преимущества с точки зрения снижения модельных рисков. Определено, что уменьшение модельных рисков с использованием технологий RegTech и SupTech возможно за счет развития технологий искусственного интеллекта, что потребует в том числе проработки соответствующего правового поля.

**Научная новизна:** особенностью статьи является разностороннее рассмотрение проблемы модельных рисков в финансовой отрасли и влияния на них технологий искусственного интеллекта в математическом, юридическом, экономическом аспектах, описание ситуации в этой области как за рубежом, так и в России.

**Практическая значимость:** изложенная в статье информация может быть использована регулирующими органами и коммерческими банками в задачах, связанных с минимизацией конкретных модельных рисков в их деятельности.

**Ключевые слова:** RegTech, SupTech, модельные риски, искусственный интеллект, машинное обучение, облачные технологии, большие данные, финансовый рынок, коммерческие банки.

**Финансирование:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 20-510-00009 Бел\_а «Трансформация системы монетарного регулирования России и Беларуси в условиях цифровизации экономики».

## MODEL RISKS IN THE FINANCIAL SPHERE UNDER THE CONDITIONS OF THE USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND MACHINE LEARNING

**Objective:** within the framework of RegTech and SupTech technologies, to assess the transformation of model risks and ways to minimize them under the increasing use of artificial intelligence methods.

**Methods:** a systematic approach to the analysis of the quality of economic models. Historical, logical, and statistical methods of research.

**Results:** the Russian and foreign experience of accounting for model risks in the financial industry is considered. Theoretical and practical works on the regulation and management of model risks in the activities of financial sector organizations are studied. The role of machine learning and artificial intelligence technologies in solving the modern problems in the functioning and regulation of financial organizations is determined. The key model risks are considered, as well as the directions of changing their specifics as a result of the artificial intelligence technologies development,

primarily machine learning, and increasing the capabilities for storage and transmission of a large amount of data. The main methods of data processing and model construction are considered, as well as their advantages in terms of reducing model risks. It is determined that the reduction of model risks using RegTech and SupTech technologies is possible due to the development of artificial intelligence technologies, which will require, among other things, the elaboration of the appropriate legal field.

**Scientific novelty:** the unique feature of the article is a comprehensive consideration of the problem of model risks in the finance industry and of the impact of artificial intelligence technologies on them in mathematical, legal, economic aspects, as well as the description of the situation in this area both abroad and in Russia.

**Practical significance:** the information presented in the article can be used by regulatory authorities and commercial banks in the tasks related to minimizing specific model risks in their activities.

**Keywords:** RegTech, SupTech, Model risks, Artificial intelligence, Machine learning, Cloud technologies, Big Data, Financial market, Commercial banks.

**Financial Support:** The work was carried out with the financial support of RFBR, grant No.20-510-00009 Bel\_a “Transformation of the monetary regulation system of Russia and Belarus under the economy digitalization”.

## Введение

Актуальность данного исследования обусловлена тем, что функционирование и развитие финансового сектора экономики постепенно становятся более зависимыми от результатов математического моделирования. Если в научных кругах модели часто умозрительны, носят демонстрационный характер и цена ошибок в них невелика, то при практических применениях в финансовой отрасли к используемым математическим моделям предъявляются гораздо более жесткие требования. Там ошибки и несовершенство моделей ведут к потере больших денег. Ряд исторических фак-

тов реализованных модельных рисков на примерах фирм NatWest, LTCM и других разобран, например, в [1]. Поэтому сейчас разработкой, верификацией и валидацией моделей в банках занимаются особые специалисты, в крупных банках — специальные подразделения. Адекватность моделей, применяемых коммерческими банками, определяет их доходы и конкурентоспособность. Для решения значительной части своих задач у банков есть возможность применять стандартные модели, но конкуренция, трансформация банков в экосистемы, их индивидуальные особенности, необходимость оперативно реагировать на изменения в экономике заставляют их создавать свои уникальные модели. При этом применяется все более совершенный и сложный математический аппарат. Многие процессы автоматизированы с помощью математического моделирования. Это делает востребованным осмысление роли модельных рисков, их трансформации в условиях повышающегося значения высоких технологий, в том числе технологий искусственного интеллекта.

Учитывать модельные риски важно и для регуляторов. От моделей, применяемых центральными банками, зависит финансовая стабильность стран мира. Поэтому они повышают требования к качеству моделей, применяемых контролируемыми ими коммерческими банками. Наличие соответствующего развитого законодательства в ряде стран дополнительно стимулирует финансовые организации разрабатывать более совершенные модели, поскольку организации могут не только терять свои деньги непосредственно в результате применения некачественных моделей, но также быть оштрафованы регулятором или потерять лицензии, если они не выполняют требования по валидации используемых моделей. Очевидно, предпочтительно, когда надзорные органы предвидят риски и предотвращают проблемы, чем когда они исправляют последствия уже возникших проблем. Центробанкам нужны разнотипные «большие данные» от подконтрольных им банков, чтобы на них обучать свои модели.

Для удобства восприятия дальнейшего изложения приведем здесь несколько определений:

SupTech (Supervisory Technology) – технологии, используемые регуляторами для повышения эффективности контроля и надзора за деятельностью участников финансового рынка<sup>1</sup>.

RegTech (Regulatory Technology) – технологии, используемые финансовыми организациями для повышения эффективности выполнения требований регулятора<sup>2</sup>.

Технологии искусственного интеллекта подходят для обработки больших данных, поскольку человеческих возможностей может не хватать, а вычислительные способности искусственного интеллекта больше способностей мозга человека. Искусственный интеллект – удобный способ выносить из больших данных ценную информацию, совершенствуя за счет нее прогнозные модели и уменьшая их риски. Финансовая отрасль, как и ее регулирование, порождает большие объемы данных. Сложные правила функционирования финансовой отрасли также делают искусственный интеллект более релевантным, чем использование традиционных подходов, основанных на применении жестко закодированных алгоритмов.

Целью работы является описание современного состояния проблемы модельных рисков в финансовом секторе, в его регулировании в условиях развития информационных технологий, в первую очередь технологий искусственного интеллекта, анализ способов минимизации модельных рисков, представляющих интерес для повышения устойчивости банковского сектора.

В соответствии с поставленной целью излагаемый далее материал условно разделен на четыре раздела. В первом приводится общая информация о модельных рисках, краткий

- 
1. Основные направления развития технологий SupTech и RegTech на период 2021–2023 годов. Центральный банк Российской Федерации. 2021.
  2. Там же.

обзор исследований по модельным рискам в финансовой сфере. Во втором рассматривается применение информационных технологий, технологий искусственного интеллекта в сфере технологий SupTech и RegTech. В третьем описывается проблема модельных рисков в условиях развития методов искусственного интеллекта, в первую очередь машинного обучения. В четвертом рассматриваются пути минимизации модельных рисков на основе перспективных направлений в области анализа данных. В конце статьи на основе перечисленных разделов приводятся выводы и рекомендации.

### **Обзор исследований по модельным рискам в финансовой сфере**

Понятие модельных рисков вошло в употребление в финансовой сфере уже в прошлом веке [2]. Эта разновидность рисков обусловлена тем, что расчеты по математическим моделям могут недостаточно точно отражать описываемые процессы, содержать существенные ошибки [3–4] (хотя сами модели по природе своей разрабатываются для уменьшения рисков). Эти риски обычно относят к группе операционных рисков [5], связанных с выполнением организациями своих функций.

Для уменьшения проблемы разработан ряд нормативных документов, где описаны требования к используемым финансовыми организациями математическим моделям. Впервые детальные предписания по управлению модельными рисками представил официальный документ ФРС США<sup>3</sup> от 2011 г. Там обозначена важность обеспечения проверки безопасности использования моделей на всех этапах их жизненного цикла с привлечением независимых экспертов. Позже появился ряд других документов с рекомендациями и указаниями, например, в ЕС разработан документ для банков ECB TRIM<sup>4</sup>. Этой теме уделено внимание и в соглашениях Базельского

---

3. Office of the Comptroller of the Currency. Supervisory guidance on model risk management. SR Letter 11–7. Attachment. April 2011.

4. Guide for the targeted review of internal models (TRIM). European Central Bank. 2017.

комитета, где ключевой задачей является повышение качества управления риском в банках и определяются требования к их капиталу, обсуждается валидация финансовых моделей [6].

Управлению модельными рисками посвящены отдельные брошюры четырех крупнейших компаний, предоставляющих аудиторские и консалтинговые услуги [7–10]. Изданы книги, посвященные введению в проблематику модельных рисков в сфере финансов, в которых описывается математический аппарат, необходимый для исследования проблемы, примеры из практики [11–13], также изданы сборники статей [14–15].

В России пока нет документов по рассматриваемой проблеме с подробным уровнем детализации. Термин «модельный риск» закреплен в п. 4.2 Приложения 1 новой редакции Указания Банка России от 15.04.2015 № 3624-У. Также он используется в Положении Банка России от 8 апреля 2020 г. № 716-П<sup>5</sup>. Банк России ставит отдельной задачей оценку рисков для финансовой стабильности при использовании цифровых технологий на финансовом рынке<sup>6</sup>. Также под эгидой Комитета по стандартам Базель II и управлению рисками при Ассоциации российских банков разработан документ [16], где детально расписаны особенности валидации моделей. Представляет интерес подготовка и публикация подобных русскоязычных документов, посвященных Базелю III.

Релевантных российских книг и статей в русскоязычных журналах с использованием термина «модельные риски» очень мало, есть, например, посвященная им статья [4]; теме математических моделей, связанных с Базелем II, посвящена книга [17]. Возможно, это связано с небольшой популярностью словосочетания «модельные риски». Близкими

- 
5. Положение Банка России от 08.04.2020 № 716-П «О требованиях к системе управления операционным риском в кредитной организации и банковской группе» // Вестник Банка России. № 51 (2187). 2 июля 2020. С. 13–62.
  6. Основные направления развития финансового рынка Российской Федерации на 2022 год и период 2023 и 2024 годов. Проект для общественного обсуждения от 23.07.2021. Центральный банк Российской Федерации. Москва. 2021.



по смыслу темами являются валидация моделей, оценка качества, адекватности, ошибки моделей. Есть удобные для первоначального ознакомления с темой главы, посвященные модельному риску, в отдельных книгах по риск-менеджменту, например, в переводной книге [1] и в книге российских авторов [18].

В недавно вышедшей статье [19] охарактеризовано правовое регулирование модельного риска в Белоруссии, которое там менее проработано, чем в России.

Тема модельных рисков становится предметом обсуждения на крупных мероприятиях. Она была в центре внимания участников круглого стола «Валидация риск-моделей: процессы и лучшие практики российских банков», организованного в ноябре 2018 г. учебным центром Группы «Интерфакс» совместно с проектом RU Data и с PRMIA Russia. В программе XVII Russia Risk Conference 2021 — крупнейшей ежегодной конференции для риск-менеджеров — в перечне заявленных тем фигурируют коррекция моделей кредитного риска и трансформация банковских процессов на основе технологий искусственного интеллекта. Гильдией инвестиционных и финансовых аналитиков и риск-менеджеров (ГИФА) и НП «Русское общество управления рисками» разработан профессиональный стандарт «Специалист по управлению финансовыми рисками». В опубликованной в открытых источниках его версии 2.8 от 07.05.2016 среди перечня направлений указана трудовая функция «Специалист по управлению интегрированными рисками — Агрегированный и модельный риски», для которой перечислен детальный список необходимых знаний.

## **Искусственный интеллект и машинное обучение в регуляторной и надзорной практике**

Понятия искусственного интеллекта и машинного обучения приобрели популярность существенно раньше, чем стала актуальной тема модельных рисков, а также надзорные

и регуляторные технологии. Однако благодаря увеличению вычислительных мощностей и развитию методов, таких как глубокое обучение, практическая роль технологий искусственного интеллекта значительно возросла в течение 2010-х гг. Поэтому продолжает увеличиваться и их влияние на специфику модельных рисков.

Машинное обучение — особо популярное направление в искусственном интеллекте. В отличие от методов искусственного интеллекта, использующих логику и дедукцию, связанных с концепцией экспертных систем, оно больше соотносится с математической статистикой, значит, в этом подходе выше роль случайности. Понятие машинного обучения введено А. Самуэлем в 1950-х гг. В рамках этого подхода задачи решаются не напрямую, а при помощи предшествующего обучения системы посредством решения некоторого количества сходных задач. Понятие машинного обучения не имеет четких границ, поскольку даже в классических численных методах задаются начальные или граничные условия, связывающие теорию с эмпирическими данными. Но типичные методы машинного обучения используют данные гораздо интенсивнее, чем классические численные методы. В рамках этого подхода набор данных, в которых нужно выявить закономерности, делят на обучающую и контрольную выборки. Происходит разметка данных, на которых обучается модель, чтобы затем находить свойства, аналогичные свойствам обучающих данных на новых выборках. Роль автоматического обучения в процессе развития численных методов возрастает. Алгоритмы не просто производят вычисления на основе заданной теории, а могут непрерывно обучаться уже в процессе использования на вновь поступающих данных. Дальнейшим этапом можно назвать развитие технологий AutoML, автоматизированного машинного обучения, где роль человека еще меньше.

Технологии машинного обучения применимы как к обработке чисел, так и к обработке текстовых документов, вытесняя частично человека и из этой области. Автоматическая

обработка текстов полезна при мониторинге СМИ, данных социальных сетей, юридических документов и др.

В рамках регуляторных и надзорных технологий решается ряд практических задач, где востребованы методы искусственного интеллекта [20]. Regtech применяется для идентификации клиентов, для управления рисками, для стресс-тестирования<sup>7</sup>, для планирования капитала и т. д. Suptech используется, например, для упрощения взаимодействия регулятора с финансовыми организациями, для проверки их стабильности, для выявления мошенничества, для противодействия легализации (отмыванию) доходов, полученных преступным путем, финансированию терроризма и финансированию распространения оружия массового уничтожения (ПОД/ФТ/ФРОМУ) [21].

Ключевую роль в деятельности банков играют рейтинговые модели оценки достаточности капитала, с помощью которых организации или физические лица ранжируются по величине рисков для них негативных событий, таких как дефолты. Этим моделям уделяется особое внимание в нормативных документах.

Ранее тема применения искусственного интеллекта в финансовой отрасли обсуждалась в статье автора [22].

## **Модельные риски, искусственный интеллект и машинное обучение**

Выделяют ряд причин, которые могут быть связаны с модельными рисками, например:

- модель исходно некорректно описывает эмпирические данные. Например, в нее не включены какие-то важные переменные или, наоборот, случайно включены лишние; неправильно выбраны функциональные зависимости, статистические распределения и т. д.;

---

7. Prudential regulatory authority (UK). Model risk management principles for stress testing. Supervisory statement SS3/18. April 2018.

- модель, хорошо применимую для одних данных, применяют для других данных, для описания которых она менее корректна (например, модель хорошо описывает финансовую систему США, но плохо — российскую реальность). Важно иметь репрезентативную обучающую выборку, вносить данные без ошибок, правильно проводить разметку данных для обучения модели;
- внешние изменения в моделируемой предметной области изменяют свойства данных и ухудшают свойство модели описывать новые данные.

Более детально классификация причин модельных рисков приведена, например, в [18].

Для разных типов моделей причины и особенности рисков могут существенно различаться, далее рассмотрим трансформацию рисков с развитием технологий искусственного интеллекта.

Модельные риски зависят от доступа к информации, к большим данным (big data). Например, для обучения нейросетей требуются большие наборы данных. Это дает преимущество тем, у кого этого доступа больше, например, центральным банкам над коммерческими, банкам стран с большой численностью населения над банками стран, где населения мало, старым крупным банкам над новыми, что ставит различные экономические системы в неравные условия. Как правило, большие данные хранятся в облаках, а не на персональных компьютерах пользователей и могут быть доступны сторонним организациям через открытые API. Это делает их хранение более надежным, позволяет осуществлять доступ к ним из разных мест, но вызывает дополнительные риски несанкционированного доступа к данным, потери контроля над данными. Также большие данные очевидно труднее резервировать, что затрудняет их использование, например, в рамках технологий блокчейн.

Способность обучаться на данных позволяет моделям автоматически и более оперативно адаптироваться к различным изменениям, происходящим в описываемых ими

финансово-экономических системах. Однако то, что роль человека при этом уменьшается и что в машинном обучении ошибки менее контролируемы, ставит новые проблемы. Предполагается, что технологиями AutoML могут пользоваться люди, лишь слабо владеющие специфическими знаниями и навыками в программировании и в методах обработки данных. Очевидно, это является причиной дополнительных рисков.

Ошибки в алгоритмах машинного обучения могут оказаться менее привычны, чем типичные ошибки человека [23]. Уже не столь очевидно, кто отвечает (в том числе юридически) за ошибки, допущенные такими программами. Ошибки, имеющие отношение к данным, к самой модели, к ее использованию экспертами, непросто различить между собой.

Одним из наиболее известных направлений в рамках технологий машинного обучения являются искусственные нейросети. Они имеют преимущества перед традиционными алгоритмами, когда нет возможности с достаточной точностью аналитически описать закономерности, что характерно для такой сложной системы, как общество, в ситуациях, когда данные зашумлены и изменчивы. При этом даже для эксперта не является очевидным, каким образом в процессе обработки данных нейросетями получаются правильные результаты. И неочевидно, при каких условиях можно получить неправильные результаты. Более того, результаты могут оказаться неправильными случайно в силу статистического характера моделей.

Одной из проблем в моделях машинного обучения является переобучение. Оно накладывает ограничения на целесообразность усложнения модели свыше определенного уровня. То есть до конкретного уровня сложности (определяемой, например, числом используемых переменных) модель выполняет работу на закономерностях, но слишком сложная модель в условиях ограниченных данных обучается на шуме, в результате чего ее способность к прогнозированию снижается по сравнению с упрощенным оптимальным вариантом.

Особые проблемы создают статистические распределения данных с «тяжелыми хвостами». В отличие от нормальных распределений в них нельзя пренебречь рисками крупных негативных событий. Путаница таких распределений с нормальными уже приводила к реализации модельных рисков. Процессы с такими распределениями часто встречаются в финансовой отрасли и могут приводить к неожиданным эффектам [24]. Тяжелые хвосты нельзя путать с выбросами, если данные, отклоняющиеся от типичных, являются не артефактом, а свойством исследуемого процесса, их нельзя исключать при расчетах. Для достаточно точного определения численных характеристик таких распределений требуется существенно больший объем выборки, чем для аналогичных расчетов с использованием нормальных распределений.

Также нужно учитывать, что, поскольку, например, нейросети требуют больших объемов данных для обучения, алгоритм адаптируется к изменениям в них не сразу и является частично обусловленным устаревшими данными.

Банки с меньшим числом клиентов и с короткой историей существования могут иметь недостаточно накопленных собственных данных для обучения своих моделей, а при работе с чужими данными, даже если таковые доступны, могут остаться неучтенными различия в индивидуальных особенностях банков.

Также проблемой является «предвзятость искусственного интеллекта», когда он, обучившись на человеческом поведении, проявляет «поведение», которое по результатам может быть определено как расизм, сексизм и т. п., в частности, значительно чаще отказывает в обслуживании (например, в выдаче банком кредита) клиентам определенной расы или определенного пола. При использовании моделей важно соблюдать баланс между личной выгодой их хозяев и интересами общества в целом, учитывать этические аспекты, понятные для людей, но не всегда заложенные в алгоритмах.

## **Минимизация модельных рисков при использовании искусственного интеллекта и машинного обучения**

Как видно из истории, кризисные явления, связанные с тем, что существовавшие на какой-то момент времени теории и математические модели экономики не предугадывали какие-либо проблемы, стимулировали развитие качественно новых моделей. Так, кейнсианство возникло по итогам Великой депрессии, мировой кризис 2008 г. показал слабые места моделей того времени, например, моделей DSGE и простимулировал несколько нововведений в экономико-математическом моделировании.

Развитие математических и статистических методов обнаруживало недостатки старых моделей и тем самым позволяло снизить модельные риски. Например, развитие математических методов нелинейной динамики, синергетики позволило корректнее работать с нелинейными процессами, теория коинтеграции изменила подход к моделированию экономических систем с нестационарными временными рядами, появление непараметрических методов Монте-Карло, таких как бутстрапы, перестановочные тесты и другие, позволило корректнее описывать системы, в том числе с малыми выборками данных, где распределения величин отличны от нормального и временные ряды нестационарны [25].

Перечисленные нововведения хороши тем, что они в основном наглядно интерпретируемы. Использование нейросетей, даже если оно улучшает способность к прогнозированию, этой особенности лишено. Ведутся исследования интерпретируемых, объяснимых методов машинного обучения (таких как деревья решений), методов типа *shap*, позволяющего выявить значение каждого признака в прогнозе, делаются попытки увеличить понимание внутренних механизмов работы нейросетей. Нейросети популярны, но не являются панацеей, с помощью которой можно решить любые задачи лучше, чем другими методами.

Точность расчетов алгоритмом машинного обучения сложнее оценить, чем для программы, где алгоритм фиксирован. Возникает вопрос, когда можно считать, что модель качественно, адекватно описывает данные, для анализа которых она предназначена [26]. Важнейшим свойством финансовых моделей является их способность давать прогнозы, но это не единственный фактор, поскольку модели имеют разную теоретическую обоснованность, разную сложность, позволяют разную скорость вычислений, могут с разной точностью рассчитывать разные показатели в разных диапазонах данных, иметь различную чувствительность к ошибкам в данных, к выбросам, к несбалансированности выборок, с разной точностью прогнозировать различные эффекты и т. п.

Для таких важных финансовых моделей, как рейтинговые, различают прогнозную (калибровка) и дискриминационную способности.

Для оценки дискриминационной способности, определяющей, насколько способность модели относить объекты к заданным классам лучше случайного угадывания, используются коэффициент Джини, критерий Колмогорова — Смирнова и др.

Для оценки калибровки, определяющей способность предсказать в целом уровень некоторого исследуемого эффекта (например, вероятность дефолта) используются биномиальный тест, тест хи-квадрат и т. д.

Модель может быть хорошо откалибрована, но плохо разделять конкретные объекты и, наоборот, хорошо их различать, но слабо давать общие прогнозы для их совокупности.

Стабильность модели, определяемая репрезентативностью данных, использованных при разработке и валидации модели, соответствием их свойств свойствам актуальных данных измеряется *population stability index* (PSI).

Отсутствие дисбалансов, т. е. избыточной концентрации объектов в каких-либо интервалах рейтинговой шкалы, определяется индексом Херфиндаля.



О критериях адекватности моделей можно подробнее прочесть, например, в [27, 16].

В рамках машинного обучения ошибки моделей раскладываются на три компонента: смещение (*bias*), разброс (*variance*), неконтролируемая ошибка (*irreducible error*) [28]. Большое смещение имеют, как правило, недообученные модели, большой разброс — переобученные, и приходится искать компромиссный оптимум.

Для минимизации модельных рисков можно использовать, например, такие методы, как:

- бенчмаркинг — сопоставление модели с лучшими моделями других организаций;
- стресс-тестирование, когда функционирование модели проверяется на устойчивость при редких, но вероятных шоках;
- бэктестинг [29], при проведении которого модель тестируется на исторических данных;
- кроссвалидация (синоним — «скользящий контроль»), когда модель обучается на одних данных, а проверяется на других;
- MPP-подход [30], в рамках которого создается вспомогательная модель, которая следит за качеством работы основной модели, обучаясь на ее ошибках.

В сфере финансовой экономики по-прежнему развиваются как методы машинного обучения, так и более традиционные методы, такие как использование теоретически обоснованных DSGE-моделей, эконометрические методы. Произойдет ли в ближайшие годы вытеснение каким-либо классом моделей остальных, покажет время. Очевидной тенденцией является развитие комбинирования различных подходов, т. е., возможно, четко различимые классы моделей будут вытесняться гибридными моделями.

В машинном обучении используется метод ансамблирования, когда некоторое число разных моделей комбинируется для создания единой оптимальной модели. Известными раз-

новидностями получающихся ансамблей являются стекинг, бэггинг, бустинг [31].

Совершенствование математического аппарата и его применения может быть простимулировано увеличением потребности в нем в обществе. Для этого, например, проводятся конкурсы моделей, которые позволяют выявить модели с наименьшим риском. Известные соревнования по исследованию данных и машинному обучению — Kaggle Competitions.

Важно также учитывать мнения экспертов в тех нестандартных, например в кризисных, ситуациях, для которых пока не разработаны стандартные методы решения проблем.

## Выводы

Исследования модельных рисков непосредственно связаны с развитием технологий RegTech и SupTech, в основе которых находятся современные финансовые и информационные технологии.

Для уменьшения модельных рисков необходимо развивать технологии RegTech и SupTech на основе технологий искусственного интеллекта, обработки больших данных, облачных технологий (стараясь при этом минимизировать возможности появления связанных с ними новых рисков).

Важно доводить в России законодательную базу в области модельных рисков и рисков, связанных с использованием искусственного интеллекта, до уровня передовых стран и до более высокого уровня.

Важно изучать разные аспекты адекватности моделей, продвигать правильное использование критериев адекватности.

Надо учитывать, что может иметь место как переоценка, так и недооценка роли искусственного интеллекта по сравнению с ролью человека. Ошибки и риски человека и искусственного интеллекта разные, что позволяет считать, что они могут компенсировать друг друга (но есть риск, что в каких-то случаях могут и усиливать друг друга).

Для уменьшения модельных рисков, связанных с искусственным интеллектом, важно уделять внимание его прозрачности и непредвзятости, проводя научные исследования в этом направлении и по их результатам внося изменения в соответствующее законодательство.

Востребованность специалистов по модельным рискам в современной России весьма высока при дефиците материалов по теме учебного характера, учитывающих российскую специфику.

Также следует помнить, что экономика — та область, где есть возможность совершенствовать не только модели, но и сами моделируемые процессы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Основы риск-менеджмента / Р.М. Марк, Д. Галэй, М. Круи. Москва: Юрайт, 2015.
2. *Derman E. Model risk quantitative strategies research notes* (April ed.). New York: Goldman Sachs & Co. 1996.
3. Model risk of risk models / J. Danielsson, K. R. James, M. Valenzuela, I. Zer // *Journal of financial stability*. 23. 2016. Pp. 79–91.
4. Тимошенко Ф.С. Контролирование модельного риска: лучшие практики финансового моделирования в процессе бюджетирования // Государственный аудит. Право. Экономика. 2016. № 1. С. 37–42.
5. Бедрединов Р.Т. Управление операционными рисками банка. 1-е изд. Москва: Onebook.ru. 2014.
6. Basel committee on banking supervision. International convergence of capital measurement and capital standards. A revised framework comprehensive version. June 2006.
7. The Deloitte center for regulatory strategy. Model risk management. Building supervisory confidence. 2018.
8. Model risk management of AI and machine learning systems / M. Dodgson, F. Ciais, K. D. Georgiev. PwC, 2020.
9. Supervisory expectations and sound model risk management practices for artificial intelligence and machine learning / G. Agarwala, A. Latorre, S. Raffel et al. EY, 2020.
10. Ni A. Model risk management. A sound practice for meeting current challenges. KPMG. 2016.
11. Morini M. Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators. Wiley. 2011.

12. Tunaru R. Model risk in financial markets: from financial engineering to risk management. World Scientific. 2015.
13. Meyer Ch., Quell P. Risk Model Validation. Risk Books. 3rd edition. 2020.
14. Christodoulakis G., Satchell S. The Analytics of Risk Model Validation. Academic Press. 2007.
15. Sheule H., Rösch D. Model Risk: Identification, Measurement and Management. Risk Books. 2010.
16. Валидация / В. Битюцкий, О. Патратий, В. Перевицкая и др. М.: Комитет по стандартам Базель II и управлению рисками, 2013.
17. Анализ математических моделей Базель II / Ф.Т. Алескеров, И.К. Андриевская, Г.И. Пеникас, В.М. Солодков. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
18. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А. Лобанова, А.В. Чугунова. М.: Альпина Паблишер, 2003.
19. Нестеренок Г. Управление модельным риском // Банкаўскі веснік: інфармацыйна-аналітычны і навучна-практычны журнал Нацыянальнага банка Рэспублікі Беларусь. 2021. № 4 (693). С. 31–38.
20. Big data and machine learning in central banking / S. Doerr, L. Gambacorta, J. M. Serena // BIS Working Papers. March 2021. № 930. Bank for International Settlements.
21. Выявление финансирования терроризма и отмывания доходов с помощью интеллектуального анализа данных / А.Г. Гасанова, А.Н. Медведев, Е.И. Комоцкий // XII Международная конференция «Российские регионы в фокусе перемен». Екатеринбург, 16–18 ноября 2017 г.: сборник докладов. Екатеринбург: Издательство УМЦ УПИ, 2018. Ч. 1. С. 154–166.
22. Кирилук И.Л. Методы интеллектуального анализа данных и регулирование цифровой трансформации финансового сектора в России и в мире // Вестник Института экономики Российской академии наук. 2020. № 4. С. 152–165.
23. Горбань А.Н. Ошибки интеллекта, основанного на данных // Сборник статей по материалам Международной конференции «Интеллектуальные системы в науке и технике» и Шестой всероссийской научно-практической конференции «Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века» (г. Пермь, 12–18 октября 2020 г.). Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020.
24. Талеб Н.Н. Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. 2-е изд., доп. М.: Азбука-Аттикус. 2012.

25. Кириллюк И.А., Сенько О.В. Выбор моделей оптимальной сложности методами Монте-Карло (на примере моделей производственных функций регионов Российской Федерации) // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 111–118.
26. Лапач С.Н., Радченко С.Г. Основные проблемы построения регрессионных моделей // Математичні машини і системи. 2012. № 4. С. 125–133.
27. Bag D. Model validation under Basel II // CRO. Finsight-Media. 2010. Pp. 10–15.
28. Reconciling modern machine-learning practice and the classical bias–variance trade-off / M. Belkin, D. Hsu, S. Ma, S. Mandal // Proc. Natl. Acad. Sci. 2019. № 32 (116). Pp. 15849–15854.
29. Дедова М.С. Сравнение методов бутстрапа временных рядов для целей бэкtestирования моделей оценки банковских рисков // Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 1. С. 84–109.
30. MPP-challenge: моделирование прогноза качества модели / С. Афанасьев, Д. Котерева, К. Стародуб // Сборник профессиональных материалов для 9-й межотраслевой конференции Scoring Day. 2021, весна. С. 10–21.
31. Замятин А.В. Интеллектуальный анализ данных: учеб. пособие. Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2020.

#### REFERENCES

1. Mark R., Galai D., Crouhy M. (2015). Bases of risk management. Moscow, Yurajt (in Russ.).
2. Derman E. (1996). Model risk quantitative strategies research notes (April ed.). New York, Goldman Sachs & Co.
3. Danielsson J., James K.R., Valenzuela M., Zer I. (2016). Model risk of risk models // Journal of Financial Stability, 23, 79–91.
4. Timoshenko Ph.S. (2016). Controlling model risk: best practices in financial modeling in budgeting process // Gosudarstvennyj audit. Pravo. Ekonomika. 1, 37–42 (in Russ.).
5. Bedredinov R.T. (2014). Bank operational risk management (1 ed.). Moscow, Onebook.ru (in Russ.).
6. Basel committee on banking supervision. (June 2006). International convergence of capital measurement and capital standards. A revised framework comprehensive version.
7. The Deloitte center for regulatory strategy. (2018). Model risk management. Building supervisory confidence.
8. Dodgson M., Ciaia F., Georgiev K.D. (2020). Model risk management of AI and machine learning systems. PwC.

9. Agarwala G., Latorre A., Raffel S., Mehta R., Zhao J., Nurullayev A., Clark B., Tang R. (2020). Supervisory expectations and sound model risk management practices for artificial intelligence and machine learning. EY.
10. Ni A. (2016). Model risk management. A sound practice for meeting current challenges, KPMG.
11. Morini M. (2011). Understanding and Managing Model Risk: A Practical Guide for Quants, Traders and Validators. Wiley.
12. Tunaru R. (2015). Model risk in financial markets: from financial engineering to risk management. World Scientific.
13. Meyer Ch., Quell P. (2020). (3rd ed.).
14. Christodoulakis G., Satchell S. (2007). The Analytics of Risk Model Validation. Academic Press.
15. Sheule H., Rösch D. (2010). Model Risk: Identification, Measurement and Management. Risk Books.
16. Bityuckij V., Patratiy O., Perevickaya V., Pisarenko V., Chernyshev O. (2013). Validation. Moscow, Komitet po standartam Basel II i upravleniyu riskami (in Russ.).
17. Aleskerov F.T., Andrievskaya I.K., Penikas G.I., Solodkov V.M. (2013). Analysis of mathematical models Bazel II (2nd ed.). Moscow, FIZMATLIT (in Russ.).
18. Lobanov A.A., Chugunov A.V. (eds.) (2003). Encyclopedia of financial risk management. Moscow, Alpina Publisher (in Russ.).
19. Nesterenok G. (2021). Managing the model risk, Bankauski vesnik: informacionno-analiticheskij i nauchno-prakticheskij zhurnal Nacional'nogo banka Respubliki Belarus, 4 (693), 31–38 (in Russ.).
20. Doerr S., Gambacorta L., Serena J.M. (2021, March). Big data and machine learning in central banking, BIS Working Papers, 930. Bank for International Settlements.
21. Gasanova A.G., Medvedev A.N., Komockij E. (2018). Revealing terrorism and money laundering funding with intellectual data analysis, XII International conference “Russian regions in the focus of changes”. Yekaterinburg, 16–18 November 2017: collection of works (pp. 154–166). Ekaterinburg, Izdatel'stvo UMC UIPI, 2018, Ch. 1 (in Russ.).
22. Kirilyuk I.L. (2020). Methods of intellectual data analysis and regulation of the digital transformation of the financial sector in Russia and the world, The Bulletin of the Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences, 4, 152–165 (in Russ.).
23. Gorban A.N. (2020). Errors of a data-based intellect. In Collection of works of the International conference “Intellectual systems in science and technology” and the 6th All-Russia scientific-practical conference “Artificial intelligence in solving the topical social and economic

problems of the 21st century” (Perm, 12–18 October 2020). Permskij gosudarstvennyj nacional’nyj issledovatel’skij universitet, Perm.

24. *Taleb N.N.* (2012). *The Black Swan. The Impact of the Highly Improbable* (2d ed.). Moscow, Azbuka-Attikus (in Russ.).
25. *Kirilyuk I.L., Senko O.V.* (2020). Choosing the optimally complex models by Monte-Carlo methods (by the example of the production functions models of the Russian regios), *Informatika i ee primeneniya*, 14 (2), 111–118 (in Russ.).
26. *Lapach S.N., Radchenko S.G.* (2012). Main problems of constructing regression models, *Matematichni mashini i sistemi*, 4, 125–133 (in Russ.).
27. *Bag D.* Model validation under Basel II. (2010). CRO. Finsight-Media. Pp. 10–15.
28. *Belkin M., Hsu D., Ma S., Mandal S.* (2019). Reconciling modern machine-learning practice and the classical bias–variance trade-off, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 32 (116), 15849–15854.
29. *Dedova M.* (2018). A comparison of time-series bootstrap methods in terms of backtesting risk measurement models of banks, *The HSE Economic Journal*, 22 (1), 84–109 (in Russ.).
30. *Afanas’ev S., Kotereva D., Starodub K.* (2021). MPP-challenge: modeling the model quality prognosis. In: *Collection of professional works of the 9th intersectoral conference Scoring Day*. Pp. 10–21 (in Russ.).
31. *Zamyatin A.V.* (2020). *Intellectual data analysis, tutorial*. Tomsk: Izdatel’skij dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta (in Russ.).

#### 4.4. ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ МОНТЕ-КАРЛО

*Кириллюк И.А.*

Фрагменты из автореферата диссертации на соискание  
степени кандидата физико-математических наук. 2022.

##### **Общая характеристика работы. Актуальность темы**

Тема диссертации связана с направлением, которое называется селекцией моделей, в применении к регрессионному и кластерному анализу панельных данных. Информация о методах селекции моделей представлена в основном в англоязычной литературе, например, этой теме посвящены книги таких авторов, как Х. Линхарт, В. Цукини (H. Linhart, W. Zucchini, 1986), А. Маккуорри, С. Цай (A.D.R. McQuarrie, A. Маккуорри, С. Цай (A.D.R. McQuarrie, C.L. Tsai, 1998), П. Лахири (P. Lahiri, 2001), К. Бурнхам, Д. Андерсон (K.P. Burnham, D.R. Anderson, 2002), а также некоторое количество статей и диссертаций. Есть главы по рассматриваемой теме в переводной русскоязычной литературе, в книгах (М. Кун, К. Джонсон, 2019); (Т. Хасты, Р. Тибширани, Д. Фридман, 2020). В книге (Дж. Себер, 1980) освещена тема выбора наилучшей модели регрессии. Выбору моделей регрессии посвятили также работы, например, (Т.Н. Мало-леткин, В.Н. Мельников, В.М. Ханин 1977); Д. Кокс, Е. Снелл (D.R. Cox, E.J. Snell, 1974), А. Миллер (A.J. Miller, 1990), Т. Амемиа (T. Amemiya, 1980), (В.В. Стрижов, Е.А. Крымова, 2010). Проблеме простоты и сложности в моделировании посвящен специализированный сборник, его редакторы – А. Зеллнер, Х. Кёзенкамп, М. МакАлир (A. Zellner, H.A. Keuzenkamp, M. McAleer, 2004).



Проблема верификации моделей для панельных данных актуальна в связи с высокой востребованностью исследований панельных данных в экономике и других областях. Однако, выявляемые в задачах регрессии, классификации (в том числе, кластеризации) «закономерности» могут в каких-то ситуациях возникать случайно, а не отражать объективные законы природы. Вероятность появления таких артефактов повышается при множественном тестировании, при котором генерируются реализации некоторого случайного процесса много раз. В случаях, когда наблюдаемая связь между переменными подтверждена некоторым тестом на определенном уровне статистической значимости, будем говорить о наличии эмпирической закономерности, в противовес понятию объективной закономерности, обусловленной некими фундаментальными механизмами (эмпирическая закономерность может являться объективной, а может не являться, то есть, может быть ложной).

Ложные закономерности в задачах регрессии с высокой вероятностью возникают, когда в качестве регрессоров используются некоторые виды нестационарных процессов, такие, как случайные блуждания. Стандартные методы проверки наличия закономерностей, разработанные для классической модели линейной регрессии с нормально распределенными остатками в таких случаях применять некорректно в силу их требования к независимости отдельных наблюдений. Проблеме ложной регрессии посвящена работа К. Грэнджера, П. Ньюболда (C.J. Granger, P. Newbold, 1974). Продолжая работу над этой темой, К. Грэнджер развил теорию коинтеграции, см. Р. Энгл, К. Грэнджер (R.F. Engle, C.J. Granger, 1987). Однако для корректного применения этой теории требуется, чтобы длина временных рядов была достаточно велика, что не всегда имеет место в практических задачах.

Увеличение вычислительных мощностей компьютеров позволило применять в качестве универсального средства проверки достоверности (в смысле, статистической значимости) методы Монте-Карло (в том числе, непараметрические,

такие, как перестановочные тесты и бутстрап). Эти методы предполагают генерацию большого числа симулированных реализаций случайного процесса, имеющих определенное сходство с эмпирическими данными, но не обладающих в общем случае проверяемой объективной закономерностью и сравнение определенных характеристик симулированных и эмпирических данных.

Помимо задачи оценки оптимального числа регрессоров в моделях, со как стационарными, так и с нестационарными временными рядами, методы Монте-Карло представляют интерес при решении более широкого круга задач проверки наличия ограничений на параметры. Классическими тестами ограничения на параметры в регрессионной модели являются тест отношения правдоподобия, основанный на работах Дж. Неймана, Е. Пирсона (J. Neyman E.S. Pearson, 1933), тест А. Вальда (A. Wald, 1943) и тест множителей Лагранжа, см. С. Сильвей (S.D. Silvey, 1959), однако они требуют больших объемов выборок. К задаче исследования ограничения на параметры сводится, например, задача исследования отдачи от масштаба производства, играющей существенную роль, например, в рамках новой экономической географии П. Кругмана и др. (P. Krugman, 1991).

Кроме того, методы Монте-Карло применяются в задачах классификации, например, используются в рамках метода оптимально достоверных разбиений.

\* \* \*

Развитие описываемых в диссертации методов будет способствовать более корректному экономическому прогнозированию, для которого в числе прочего используется аппарат производственных функций, описанный в диссертации. Однако, область потенциального применения предлагаемых методов в экономике и в других науках, где используются панельные данные, намного шире.

## Цель работы

Разработка и практическое применение алгоритмов и комплексов программ с использованием параметрических и непараметрических методов Монте-Карло, для оценки статистической значимости и оптимизации регрессионных моделей, и моделей кластеризации для панельных данных, в том числе содержащих нестационарные временные ряды, являющиеся реализациями процессов с единичными корнями. Теоретическое обоснование полученных результатов.

## Основные положения, выносимые на защиту

1. Предложен способ оценки статистической значимости моделей и поиска модели оптимальной сложности для панелей данных, и применен для оценки необходимого для корректной аппроксимации набора данных числа регрессоров. Способ пригоден как для регрессоров — стационарных процессов, так и для нестационарных процессов с единичными корнями, реализован в параметрических (с использованием гауссова белого шума и случайных блужданий с приращением в форме гауссова белого шума) и в непараметрических (перестановочные тесты, бутстрапы) вариантах. Показано, что корреляция между регрессорами не влияет на распределения  $R^2$ , описывающих зависимость целевых функций от регрессоров.

2. Показана применимость разработанной методологии оценки оптимальной сложности модели в задаче оценки ограничений на параметры (в качестве конкретного практического примера продемонстрирована проверка статистической значимости условия постоянной отдачи от масштаба производственных функций в экономике). Показано, что явление ложной регрессии может приводить к ложному отклонению гипотезы о наличии ограничения на параметры (в этом случае можно говорить о наличии ложной эмерджентности).

3. Предложен и реализован метод проверки статистической значимости непостоянного характера отдачи от масштаба производства в российских регионах и статистической значимости различия величины отдачи между регионами с помощью метода оптимальных достоверных разбиений, показано, что отдача значимо не постоянна и различна между регионами.

4. Предложен метод оценки статистической значимости эмпирических закономерностей и селекции моделей для всей совокупности объектов панели с использованием доступной информации обо всех объектах, более точный, чем исследование каждого объекта по отдельности.

5. Разработана методика оценки статистической значимости кластеризации панельных данных, учитывающая возможность наличия в них нестационарных временных рядов с единичными корнями. Показано, что с нестационарностью временных рядов может быть связана не только ложная регрессия, но и ложные выводы о кластерной структуре этих рядов.

6. Разработано программное обеспечение на языке R, позволившее провести необходимые расчеты для конкретной практической экономической задачи оценки свойств производственных функций российских регионов и кластеризации регионов по ряду признаков, и применимое для более широкого круга задач.

7. Проведены аналитические исследования связи между характером отдачи и характером экономического роста. Показано, что отдача может быть и постоянной и не постоянной как в предположении экспоненциального роста признаков во времени, так и в предположении гиперболического роста.

## Научная новизна

Проведен сравнительный анализ методом Монте-Карло сложности регрессионных моделей, а также качества кластеризации наборов панельных данных с использованием в качестве симуляций как стационарных, так и нестационарных (с единичными корнями) процессов. Использование нестационарных процессов при моделировании методом Монте-Карло позволяет лучше различать истинную регрессию от ложной, оценивать ограничения на параметры линейной модели, а также более корректно оценивать качество кластеризации нестационарных временных рядов и панельных данных. Показана связь между ложной регрессией и ложными выводами об ограничениях на параметры, мультиколлинеарности, разнице между моделями, а также ее связь с «ложной кластеризацией». Новым также является применение такого рода методов для исследования производственных функций в отношении российских регионов.

## Практическая значимость

Предлагаемая методология может быть использована во множестве областей, где актуальна работа с панельными данными. В частности, в задачах экономического прогнозирования и, соответственно, для управления экономикой. В диссертации она применена для оценки статистической значимости эмпирических закономерностей, выражаемых производственными функциями, построенными для регионов Российской Федерации, а также для оценки статистической значимости кластерной структуры регионов в признаковом пространстве, характеризующем процессы производства в этих регионах. Литература по производственным функциям обширна и востребована, как в микроэкономических, так и в макроэкономических задачах, однако, во многих статьях исследования ограничены применением классических методов регрессионного анализа, в том числе, в тех случаях, где не

выполнены предпосылки для его применения. Предлагаемые в диссертации методы позволяют продвинуться в решении этих проблем. Выяснение характера отдачи от масштаба производства позволяет оценивать уровень кооперации и конкуренции в экономических системах.

## Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проведенных исследований, приводится обзор литературы, содержащей полученные ранее другими исследователями результаты по рассматриваемым в диссертации темам. Приводятся ключевые публикации по теории селекции моделей, по определению числа регрессоров в моделях, по методам Монте-Карло, по проблеме ложной регрессии, по теории коинтеграции, по непараметрической статистике, по теории ограничений на параметры, по методу оптимально достоверных разбиений, по кластерному анализу временных рядов и панельных данных, по методам оценки качества кластеризации, по нулевым моделям кластеризации, по темам, связанным с применением используемых нами методов в экономике, в том числе по производственным функциям, по ряду других тем, имеющих отношение к теме диссертации.

В **главе 1** демонстрируется методология оценки количества переменных, необходимых для аппроксимации данных регрессионными моделями с учетом возможного наличия единичных корней в переменных. В качестве эмпирических данных используются прологорифмированные значения признаков, из которых формируется инвестиционный аналог функции Кобба-Дугласа (признаки взяты из данных Росстата для 79 регионов Российской Федерации, для которых были доступны сопоставимые данные за весь исследуемый период времени, 1996), А. Маккуорри, С. Цай (A.D.R. McQuartie, 2014).

Инвестиционный аналог функции Кобба-Дугласа определяется формулой:

$$Y = A\alpha I^\beta \epsilon, \quad (1)$$

где  $Y$  — валовой региональный продукт,  $I$  — инвестиции в основной капитал,  $L$  — среднегодовая численность занятых в экономике, помноженная на среднемесячную номинальную начисленную заработную плату работающих в экономике.  $\epsilon$  — случайные остатки модели для используемой выборки данных.  $A, \alpha, \beta$  — вычисляемые параметры.

Использовано приведение  $Y, L$  и  $I$  к постоянным ценам с помощью индексов потребительских цен. В первой главе дополнительное условие  $\alpha + \beta = 1$  не налагается. Логарифмируя соотношение (1), получаем линейную регрессионную зависимость:

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(I) + \beta \ln(L) + \epsilon. \quad (2)$$

Для (2) формально применимы классические оценки статистической значимости модели в целом по  $F$ -статистике и оценки статистической значимости отдельных коэффициентов регрессии с использованием  $t$ -статистики. Однако применение таких методов для временных рядов, особенно для нестационарных, не является корректным. Поэтому, основными методами исследования в диссертации являются методы Монте-Карло. В рамках применения этих методов для сравнения с эмпирическими данными используются сгенерированные с использованием генератора случайных чисел статистически независимые друг от друга псевдовыборки (симулированные данные), в количестве по 5000, являющиеся стационарными процессами

$$X_t = e_t, \quad (3)$$

где  $e_t$  — гауссов белый шум,  $X_t$  — обобщенное обозначение величин  $\{Y, I, L\}$ , и нестационарными процессами случайных блужданий, приращения которых моделируются гауссовым белым шумом

$$X_t = X_{t-1} + e_t, \quad (4)$$

а также псевдовыборки, значения или приращения которых получены с помощью перестановочных тестов и метода

бутстрапа (для приращений перестановочные тесты не применимы). Процессы вида (4) относятся к процессам с «единичным корнем» в том смысле, что являются частным случаем процессов вида  $X_t = cX_{t-1} + e_t$ , при  $c = 1$ . Для эмпирических данных и для псевдовыборок в качестве тестовой статистики вычислялись выборочные коэффициенты детерминации  $R^2$ . Значимое отличие их значений от нуля свидетельствует о статистической значимости линейной связи между показателями. Значения эмпирических  $R^2$  сравнивались с 250-ми по величине значениями  $R^2$  для симуляций (то есть, с 95%-ными квантилями распределений их значений). Если эмпирическое значение оказывается больше 250-го по рангу значения для симуляции, то эмпирическая закономерность признается статистически значимой на уровне  $p < 0,05$ .

Расчеты визуализировались с помощью графиков сравнения эмпирических и имитированных данных, где эмпирические данные упорядочены по величине  $R^2$ . В итоге удалось выяснить, что исследуемая эмпирическая закономерность имеет место даже если мы нивелируем эффект ложной регрессии, сравнивая эмпирические данные с симуляциями, определяемыми формулой случайных блужданий (рис. 1).

Однако, если мы вычитаем из переменных линейные тренды во времени, статистическая значимость эмпирической закономерности существенно ослабевает (часто полагают, что экономико-демографические показатели, такие, как численность населения и валовой национальный продукт стран, и, соответственно, валовые региональные продукты имеют тенденцию расти в среднем по экспоненте, соответственно, их логарифмы имеют линейные тренды).

Описанным методом наряду со статистической значимостью (2) оценивалась значимость зависимости переменной  $Y$ , характеризующей валовой региональный продукт регионов отдельно от переменной  $I$ ,

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(I) + \varepsilon, \quad (5)$$

и отдельно от переменной  $L$ ,



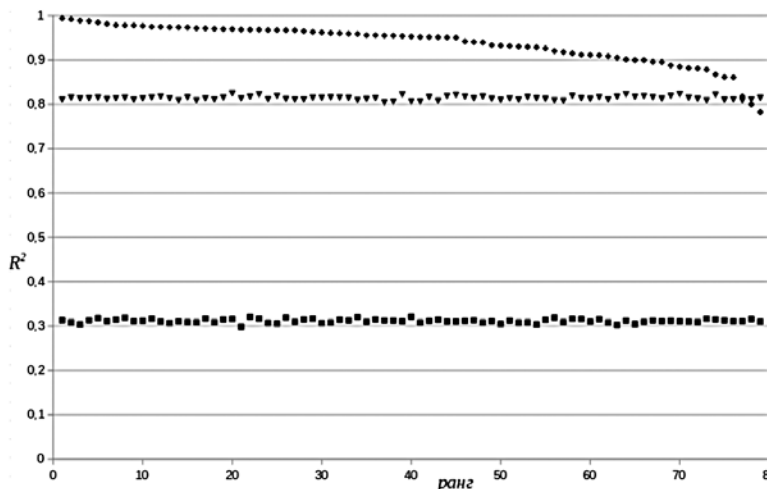


Рис. 1. Ранговое распределение для результатов расчетов по формуле (2): эмпирических  $R^2$ , в сравнении с 95%-ными квантилями  $R^2$  для симуляций, рассчитанных по формулам (3) и (4). Символы  $\blacklozenge$  обозначают эмпирические значения  $R^2$ ,  $\blacksquare$  — 95%-ные квантили эмпирического распределения  $R^2$  для псевдовыборок, генерируемых процессом (3),  $\blacktriangledown$  — генерируемых процессом (4).

$$\ln(Y) = \ln(A) + \beta \ln(L) + \varepsilon. \quad (6)$$

В результате выяснилось, что модели (5) и (6) также статистически значимо описывают данные для большинства регионов.

Таким образом, возникает особая задача — проверка того, является ли существенным включение второго регрессора к моделям  $\ln Y(\ln I)$  и  $\ln Y(\ln L)$ , или второй регрессор не повышает достоверно точность аппроксимации моделью данных. Проблема в том, что на этот вопрос нельзя сходу ответить утвердительно при увеличении значения обыкновенного коэффициента детерминации. Дело в том, что  $R^2$  в любом случае растет при включении в модель дополнительных регрессоров, даже если их влияние на зависимую переменную не является достоверным. Таким образом, при добавлении в модель значимой переменной это возрастание  $R^2$  должно

быть больше некоторых критических значений (95% квантилей приращений  $R^2$  для симуляций), которые определяются методами Монте-Карло. Для проверки статистической значимости эффекта мы вычисляли разности  $R^2$  между (2) и (5), а также между (2) и (6), и сравнивали их с разностями  $R^2$  для случаев, когда вместо дополняющих (5) до (2) или (6) до (2) моделей использовались симуляции по формулам (3) и (4). Сравнения проводились как для индивидуальных регионов, так и для всей их совокупности (то есть, данные для эмпирических значений и для соответствующих симуляций суммировались и после этого сравнивались). Выяснилось, что модель (2) в целом с высокой статистической значимостью (на уровне  $p < 0,0002$ ) увеличивает точность аппроксимации по сравнению с моделями (5) и (6).

Также в диссертации проводились оценки статистической значимости для функции Тинбергена

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(I) + \beta \ln(L) + \gamma t + \varepsilon.$$

Выяснилось, что добавление дополнительного слагаемого к (2) не улучшает статистически значимо качество аппроксимации ни для одного региона.

Проведены расчеты не только для временных рядов по каждому региону, но также для погодовых (поперечных) данных для совокупности регионов. Для всех лет получены высокие значения  $R^2 > 0.9$  для модели (2), однако частичная мультиколлинеарность в данном случае, как и для временных рядов, весьма существенна, значения  $R^2$  между  $I$  и  $L$  лежат в основном в диапазоне  $[0,8; 0,9]$ .

В главе 2 показано, что предложенная в диссертации методология применима не только для оценки числа значимых регрессоров в моделях, но и для проверки более общего эффекта — статистической значимости наличия или отсутствия в модели ограничений на параметры. Конкретным исследуемым ограничением является равенство единице суммы параметров при регрессорах в (2):

$$\alpha + \beta = 1. \quad (7)$$

Это соотношение называется условием постоянной отдачи от масштаба, оно часто (хотя и далеко не всегда) накладывается дополнительно на функции Кобба–Дугласа. Широко применяемыми тестами ограничений на параметры являются тест Вальда, тест отношения правдоподобия и тест множителей Лагранжа. Они имеют ряд ограничений в применимости, например, являются асимптотическими, то есть для получения достоверных выводов требуется достаточно большой объем выборки. Нам удалось при помощи преобразований переменных свести задачу к задаче, подобной описанной в главе 1. Используются 2 альтернативных вида преобразований переменных, первый из которых:

$$y = Y/I, \quad l = L/I. \quad (8)$$

Если мы сделаем в (1) замену переменных (8) и прологарифмируем результат, получим следующее выражение:

$$\ln(y) = \ln(A) + \beta \ln(l) + (\alpha + \beta - 1) \ln(I) + \varepsilon. \quad (9)$$

Если выполнено условие (7), получаем уравнение:

$$\ln(y) = \ln(A) + \beta \ln(l) + \varepsilon, \quad (10)$$

поскольку коэффициент при  $\ln(I)$  обнуляется. Таким образом, проверка выполнения условия постоянной отдачи преобразованием переменных (8) сводится к задаче проверки равенства нулю коэффициента в уравнении линейной регрессии. Поскольку в уравнении (1) переменные  $I$  и  $L$  входят одинаково (то есть, если  $L$  и  $I$  в (1) поменять местами, результаты расчетов не изменятся), альтернативой преобразованию (8) является замена переменных:

$$y = Y/L, \quad k = I/L, \quad (11)$$

в результате которой получаем модель вида:

$$\ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(k) + (\alpha + \beta - 1) \ln(L) + \varepsilon \quad (12)$$

и при выполнении (7) соответственно

$$\ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(k) + \varepsilon. \quad (13)$$

Проверка условия постоянной отдачи производилась описанными выше методами Монте-Карло на тех же данных, что и в главе 1 с использованием симуляций, определяемых формулами (3) и (4) вместо членов, дополняющих (10) до (9) и (13) до (12) и сравнением их с эмпирическими данными. Показано, что только для 2-х регионов условие постоянной отдачи не может быть отвергнуто на уровне  $p=0,05$ . Для подавляющего большинства регионов получена убывающая отдача от масштаба. Выводом из расчетов является то, что явление ложной регрессии может приводить к ложному отклонению гипотезы о постоянной отдаче.

Также в главе рассмотрена связь характера отдачи от факторов производства и экспоненциального, или гиперболического (степенного) роста в экономике. Показано, что и в предположении экспоненциального и в предположении степенного роста условия существования производственных функций (2) имеют место при произвольном характере отдачи, но различаются между собой. Обоснованы следующие утверждения:

### Теорема 1

Если экспоненциальный рост  $Y$ ,  $I$ ,  $L$  описывается тремя различными параметрами  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  и выполняется соотношение

$$\mu_1 = \xi + \alpha \mu_2 + \beta \mu_3,$$

производственная Функция Тинбергена (а при  $\xi = 0$  функция (2)) является интегралом движения (то есть сохраняет значение во времени).

Если  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , получаем условие постоянной отдачи:  $\alpha + \beta = 1$ . Теперь допустим, что  $Y$ ,  $L$  и  $I$  описываются формулами

степенного роста, со своими различными в общем случае наборами констант, обозначаемыми индексами 1, 2, 3:

$$Y = Y_0 (1 - \mu_1 t / C_1)^{1/(1-v_1)}, I = I_0 (1 - \mu_2 t / C_2)^{1/(1-v_2)},$$

$$L = L_0 (1 - \mu_3 t / C_3)^{1/(1-v_3)}.$$

Тогда имеет место

## Теорема 2

При выполнении соотношений:

$$\mu_1 / C_1 = \mu_2 / C_2 = \mu_3 / C_3, 1 / (1 - v_1) = \alpha / (1 - v_2) + \beta / (1 - v_3)$$

функция Кобба-Дугласа является интегралом движения. Если  $v_1 = v_2 = v_3$ , получаем условие постоянной отдачи:  $\alpha + \beta = 1$ .

Если непостоянство отдачи не является артефактом, обусловленным эффектами типа мультиколлинеарности, это может иметь важное экономическое значение, а следовательно, отдача может статистически значимо зависеть от совокупности других экономических показателей. Выяснялась связь отдачи с набором показателей, характеризующих условия экономического воспроизводства в исследуемых регионах. После того, как значения отдачи были приведены к бинарному виду (посредством сравнения с медианным значением), к ним был применен метод оптимально достоверных разбиений (ОДР) для выявления зависимости  $\alpha + \beta$  с показателями, или их парами. С помощью ОДР находятся параллельные координатным осям границы в пространстве значений показателей, полученные применением алгоритма оптимизации, оптимально разделяющие объекты с разными уровнями значений переменной, в нашем случае — отдачи (разделяющие интервал значений так, что с разных сторон границ преобладают значения для объектов, отнесенных к разным классам). Верификация эмпирических закономерностей производится с помощью перестановочных тестов.

Разбиения признакового пространства границами в ОДР могут быть одномерными (когда одна граница параллельна оси ординат), или двумерными, когда две границы разбивают пространство 2-х признаков на 4 квадранта. Из проведенного анализа сделан вывод, что существенная часть показателей экономического воспроизводства в регионах демонстрирует статистически значимую связь с отдачей от масштаба производства (при использовании одномерного варианта ОДР для 21-го из 50 проверенных показателей, выполняется соотношение  $p < 0,05$ ).

В главе 3 методы Монте-Карло применяются для оценки статистической значимости кластерной структуры, полученной в результате применения алгоритма иерархической агломеративной кластеризации на тех же наборах панельных данных, что используются в главах 1 и 2 для построения производственных функций. Иерархическая кластеризация имеет место, когда в результате работы соответствующего алгоритма создается иерархия (дерево) вложенных кластеров. Таким образом, при ее использовании не нужно выдвигать априорных предположений о числе кластеров. Особым направлением в задачах кластеризации является кластеризация временных рядов (в диссертации речь идет о кластеризации панельных данных). Она обладает своими особенностями и допускает большее разнообразие подходов, чем более традиционная кластеризация точек в некотором пространстве.

Из существующего разнообразия вариантов формул для дистанций между объектами мы используем евклидову метрику. При этом используется два альтернативных подхода: 1) производится усреднение значений признаков по времени, и для них вычисляются евклидовы метрики, определяющие дистанции между регионами  $i$  и  $j$  по формуле:

$$d_{xij} = \left[ \sum_{p=1}^3 (\bar{x}_{jp} - \bar{x}_{ip})^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

где  $\bar{x}_{ip}$   $\bar{x}_{jp}$  – усредненные по времени значения показателей  $Ln(Y)$  при  $p=1$ ,  $Ln(I)$  при  $p=2$ , и  $Ln(L)$  при  $p=3$ . Затем произ-

водится кластеризация с использованием вычисленных дистанций между всеми регионами.

2) евклидовы дистанции для кластеризации вычисляются непосредственно между трехкомпонентными временными рядами, с учетом разницы между признаками объектов во все годы рассматриваемого периода (всего 19 лет) по формуле:

$$d_{xij} = \left[ \sum_{p=1}^3 \sum_{t=1}^{19} (\bar{x}_{jpt} - \bar{x}_{ipt})^2 \right]^{1/2}, \quad (15)$$

где  $x_{ipt}$ ,  $x_{jpt}$  — значения признаков  $i$ -го и  $j$ -го регионов в год  $t$ .

В распределенном по некоторому пространству множестве объектов кластеры могут возникать по разным причинам — закономерно, или случайно. Они могут быть выражены сильнее или слабее. Поэтому возникают задачи оценки качества кластеризации и определения наиболее выраженного числа кластеров в исследуемом объеме пространства. В известной нам литературе описаны по меньшей мере несколько десятков индексов оценки качества кластеризации. В нашем исследовании используются 14 индексов, из которых здесь в качестве примера подробнее опишем 2 индекса, относящихся к наиболее популярным — индекс Данна и Силуэт.

Индекс Данна здесь используется в первоначальном варианте (существует ряд его модификаций) и определяется формулой:

$$D = \min_{i,j \in \{1 \dots c\}, i \neq j} \left\{ \frac{d(c_i, c_j)}{\max_{k \in \{1 \dots c\}} \text{diam}(c_k)} \right\}, \quad (16)$$

где  $d$  — расстояние между кластерами  $c_i$ ,  $c_j$ ;  $\text{diam}(c_i)$  — максимальное расстояние между элементами одного кластера.

Силуэт всей кластерной структуры определяется по формуле:

$$swc = \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} S_{xj}, \quad (17)$$

как деленная на  $N_x$  — количество элементов в кластеризуемом множестве сумма Силуэтов каждого отдельного элемента, определяемых по формуле:

$$S_{xj} = \frac{b_{pj} - a_{pj}}{\max(a_{pj}, b_{pj})}, \quad (18)$$

где  $a_{pj}$  — среднее расстояние от объекта до других объектов своего кластера,  $b_{pj}$  — среднее расстояние от объекта до других объектов ближайшего другого кластера.

На рисунке — зависимость индексов Данна (справа) и Силуэт (слева) от числа кластеров. Расстояние между кластерами — average, между рядами — по данным за все годы. Введены следующие обозначения:

▲ — 250-е по рангу (то есть 95% квантили), 2500-е по рангу (то есть медианные) и 4750-е по рангу (то есть 5% квантили) значения индекса оценки качества кластеризации для симуляций белым шумом, × — 95% квантили, медианы и 5% квантили значений индекса оценки качества кластеризации для симуляций случайными блужданиями, ● — эмпирические значения индекса.

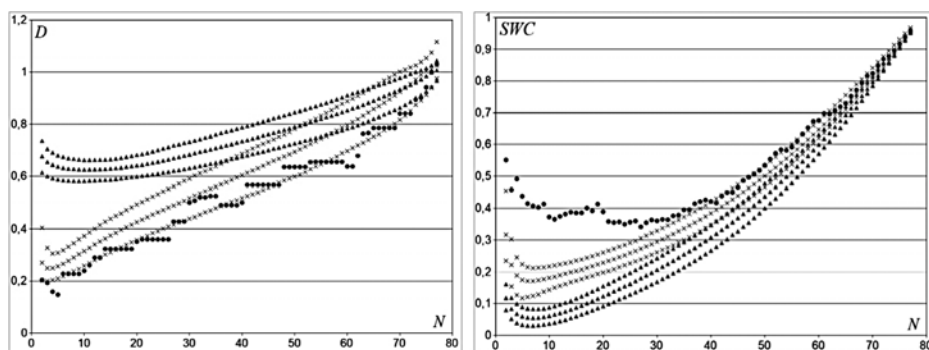


Рис. 2. Зависимость индексов Данна (слева) и Силуэта (справа) от числа выделенных кластеров при кластеризации с использованием дистанций (15) и расстояния между кластерами «average».



Формулы для остальных исследуемых индексов приведены в статье (M. Charrad, N. Ghazzali, V. Boiteau, A. Niknafs, 2014). Для нашего исследования использовались те индексы, для которых оптимальному числу кластеров соответствуют максимумы или минимумы индексов. Утверждается, что чем более выражена кластеризация (при данном числе кластеров) тем больше или меньше соответствующие значения индексов. Однако, существует проблема определения критических значений этих индексов, которые разделяют случаи с достоверной и не достоверной кластеризацией. Для ее решения предлагаются нулевые гипотезы, подразумевающие отсутствие объективных закономерной кластерной структуры, по крайней мере с числом кластеров больше одного. Могут быть различные варианты таких нулевых гипотез. Нами применяются в качестве таковых панельные данные с компонентами, сгенерированными в качестве гауссова белого шума с одинаковыми распределениями, а также с компонентами, сгенерированными в виде одинаково распределенных случайных блужданий. Кластерная структура считается статистически значимой на уровне  $p=0,05$  в том случае, когда при данном предполагаемом числе кластеров значение индекса, вычисленного по эмпирическим данным, превышает 95%-й квантиль индекса, вычисленного по симуляциям. Показано, что в случае, когда евклидовы дистанции вычисляются по не усредненным временным рядам, 5%-ные доверительные интервалы распределений индексов для двух описанных вариантов нулевых гипотез для ряда индексов существенно не совпадают (в отличие от случая кластеризации по усредненным показателям). Используемые эмпирические данные характеризуются слабой кластеризацией. Для этого случая выявлено существенно различное поведение для разных индексов в зависимости от предполагаемого числа кластеров. При этом только часть индексов показали статистически значимую кластеризацию в области малого числа предполагаемых кластеров. В итоге в диссертации сформулированы наиболее значимые, по нашему мнению, выводы с рекомендациями для

дальнейших исследований кластеризации панельных данных, среди которых отметим следующие:

- целесообразно использовать набор различных индексов оценки качества кластеризации, их комбинации, а не ограничиваться каким-то одним индексом, чтобы не прийти к ложным обобщениям в выводах;
- при выборе нулевых гипотез для проверки качества кластеризации временных рядов нужно учитывать факт их (не)стационарности, подбирать нулевые гипотезы об отсутствии кластеризации, соответствующие природе исследуемых временных рядов. Нестационарность временных рядов может приводить не только к ложной регрессии, но и к ложным выводам о кластеризации.

Для имитированных данных с сильнее выраженной кластеризацией, что соответствует значительному превышению расстояний между кластерами над их характерными размерами, исследуемые индексы в наших расчетах работали в основном успешнее, выделяя объективное число кластеров.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации, указаны перспективные направления для дальнейших исследований.

## СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ И.Л. КИРИЛЮКА

1. Трансформация системы монетарного регулирования финансовых рынков Российской Федерации и республики Беларусь в условиях цифровой экономики

Андрюшин С.А., Григорьев Р.А., Кирилук И.Л.,  
Кочергин Д.А., Курносков А.В., Никитина С.А.,  
Свиридов А.П., Голод А.В., Котова В.А., Семенов А.Ю.,  
Тихонов А.О., Юзефальчик И.В.

Москва, 2022.

2. Синтез в экономической теории и экономической политике

Маевский В.И., Кирдина-Чэндлер С.Г., Волынский А.И.,  
Вольчик В.В., Исламутдинов В.Ф., Кирилук И.Л.,  
Круглова М.С., Малков С.Ю., Маслюкова Е.В.,  
Ореховский П.А., Проволович Т.О., Рубинштейн А.А.,  
Сенько О.В., Смородинская Н.В., Фролов Д.П.,  
Ценжарик М.К.

Москва, 2022.

3. Особенности и перспективы использования формата xbrl и дата-центричной отчетности в финансовой сфере России.

Свиридов А.П., Кирилук И.Л.

Вестник Института экономики Российской академии  
наук. 2022. № 3. С. 126–143.

4. Методы интеллектуального анализа данных в исследованиях эпидемии COVID-19.

Сенько О.В., Кузнецова А.В., Воронин Е.М., Кравцова О.А.,  
Борисова Л.Р., Кирилук И.Л., Акимкин В.Г.

Журнал Белорусского государственного университета.  
Математика. Информатика. 2022. № 1. С. 83–96.

5. Модельные риски в финансовой сфере в условиях использования искусственного интеллекта и машинного обучения.

Кирилук И.Л.

Russian Journal of Economics and Law. 2022.

Т. 16. № 1. С. 40–50

6. Зависимость количественных индикаторов уровня жизни населения от социально-экономического уклада страны.

Борисова Л.Р., Кузнецова А.В., Алещенко А.В.,  
Кирилюк И.А.

В сборнике: Новые технологии высшей школы.  
Наука, техника, педагогика. Материалы Всероссийской  
научно-практической конференции. Москва, 2021.  
С. 127–132.

7. Исследование взаимосвяз и производственных функций социально-экономических показателей российских регионов методом оптимальных разбиений.

Кирилюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

Информационные технологии и вычислительные  
системы. 2021. № 1. С. 20–31.

8. Мезоэкономика: элементы новой парадигмы.

Маевский В.И., Кирдина-Чэндлер С.Г., Волынский А.И.,  
Круглова М.С., Менар К., Шаститко А.Е., Кошовец О.Б.,  
Гареев Т.Р., Эльснер В., Кирилюк И.А., Ганичев Н.А.,  
Ореховский П.А., Дерябина М.А., Малков С.Ю.,  
Рубинштейн А.А., Красильникова Е.В., Верников А.В.  
Москва, 2020.

9. Математический аппарат для исследования иерархических систем в экономике.

Кирилюк И.А.

В сборнике: Эволюция иерархических структур  
в экономике и экономический рост. Сборник материалов  
XIII Международного Пущинского симпозиума по  
эволюционной экономике. Москва, 2020. С. 116–126.

10. Позитивный образ будущего и влияние развития технологий на экономику.

Кирилюк И.А., Свиридов А.П.

В книге: Возможные сценарии будущего России и мира:  
междисциплинарный дискурс. Сборник научных  
трудов участников XI Международной Кондратьевской

конференции. Под редакцией В.М. Бондаренко. 2020.  
С. 535–536.

11. Методы интеллектуального анализа данных и регулирование цифровой трансформации финансового сектора в России и в мире.

Кирилюк И.А.

Вестник Института экономики Российской академии наук. 2020. № 4. С. 152–165.

12. Выбор моделей оптимальной сложности методами Монте-Карло (на примере моделей производственных функций регионов Российской Федерации)

Кирилюк И.А., Сенько О.В.

Информатика и ее применения. 2020.

Т. 14. № 2. С. 111–118.

13. Оценка качества кластеризации панельных данных с использованием методов Монте-Карло (на примере данных российской региональной экономики).

Кирилюк И.А., Сенько О.В.

Компьютерные исследования и моделирование. 2020.

Т. 12. № 6. С. 1501–1513.

14. Оценка социально-экономической эффективности проекта по развитию железнодорожной сети Сибири и Дальнего Востока

Акаев А.А., Давыдова О.И., Кирилюк И.А., Малков А.С., Малков С.Ю., Шульгин С.Г.

В сборнике: Пространственный потенциал развития России: невыученные уроки и задачи на будущее.

Сборник научных трудов участников Международной научной конференции – XXVI Кондратьевские чтения. Под редакцией В.М. Бондаренко. 2019. С. 10–15.

15. О математических исследованиях иерархических систем в экономике.

Кирилюк И.А.

В книге: Эволюция иерархических структур в экономике и экономический рост. Сборник тезисов докладов. Ответственный редактор – В.И. Маевский. 2019. С. 38–39.

16. Потенциал развития и воздействия на общество страховой отрасли в условиях внедрения высоких технологий.

Кирилюк И.А., Свиридов А.П.

В сборнике: Новая экономическая политика для России и мира. Сборник научных трудов участников Международной научной конференции. XXVII Кондратьевские чтения. Под редакцией В.М. Бондаренко. 2019. С. 98–103.

17. Основные тенденции развития цивилизации сквозь призму философии К.Э. Циолковского

Кирилюк И.А.

В книге: Научное наследие и развитие идей К.Э. Циолковского. Материалы 54-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. 2019. С. 148–151.

18. Общественная деятельность в медицине и благотворительности как фактор воздействия на человеческий капитал.

Кирилюк И.А., Свиридов А.П.

В сборнике: Арригиевские чтения по теме: «Глобальный хаос современного мироустройства: сущность, развитие и пути преодоления. Проблемы мирового переустройства в условиях тройного переходного периода». Материалы международной научно-практической конференции, в 2-х частях. 2019. С. 96–98.

19. Проблемы пожилых людей и развитие института пациентских организаций.

Кирилюк И.А., Свиридов А.П.

Клиническая геронтология. 2019. Т. 25. № 9–10. С. 52–53.

20. Экспертное заключение на проект документа Банка России «Основные направления единой государственной

денежно-кредитной политики на 2020 год и период 2021 и 2022 годов»

Андрюшин С.А., Бурлачков В.К., Кирилюк И.А.,  
Рубинштейн А.А., Слуцкий Л.Н.

Банковское дело. 2019. № 10. С. 8–17.

21. Антиинфляционная политика Банка России: вопросы теории и практики.

Андрюшин С.А., Кирилюк И.А., Рубинштейн А.А.

Банковское дело. 2019. № 4. С. 12–20.

22. Математическое моделирование в задачах институционального дизайна.

Кирилюк И.А.

Terra Economicus. 2019. Т. 17. № 3. С. 64–77.

23. Meso-level of Economy: Theoretical Approaches and math Modeling.

Kruglova M.S., Volynskii A.I., Kirilyuk I.L.

Journal of Institutional Studies. 2019. Vol. 11. No 1.

Pp. 41–54.

24. Рынок страхования в России: текущее состояние и перспективы.

Кирилюк И.А., Свиридов А.П.

Вопросы теоретической экономики. 2019.

№ 2 (5). С. 43–61.

25. Мезоэкономика: состояние и перспективы.

Волынский А.И., Гареев Т.Р., Дементьев В.Е.,  
Дерябина М.А., Камко Е.В., Кирдина-Чэндлер С.Г.,  
Кирилюк И.А., Клейнер Г.Б., Круглова М.С.,  
Маевский В.И., Малков С.Ю., Ореховский П.А.,  
Плискевич Н.М., Смородинская Н.В., Соколов Г.М.,  
Стрекалова А.С., Фролов Д.П.

Коллективная монография. М., 2018.

26. Математическое моделирование мезоэкономических систем с учетом их целостности.

Кирилюк И.А.

В сборнике: Гетеродоксия versus экономический редукционизм: микро-, мезо-, макро-. Сборник трудов. 2018. С. 219–228.

27. Климат и «коридоры» экономической эволюции: результаты интеллектуального анализа данных.

Кирдина-Чэндлер С.Г., Верников А.В.,  
Волынский А.И., Кирилюк И.А., Круглова М.С.,  
Рубинштейн А.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

В сборнике: Социофизика и социоинженерия'2018. Труды второй Всероссийской междисциплинарной конференции. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. 2018. С. 57–58.

28. Модели производственных функций для регионов России. Кирилюк И.А.

В книге: Стратегическое планирование и развитие предприятий. Материалы Девятнадцатого всероссийского симпозиума. Под редакцией Г.Б. Клейнера. 2018. С. 584–586.

29. Верификация регрессионных моделей во временных рядах.

Кирилюк И.А., Сенько О.В.

В книге: Интеллектуализация обработки информации. Тезисы докладов 12-й Международной конференции. 2018. С. 98–99.

30. Исследования соотношений между нестационарными временными рядами на примере производственных функций.

Кирилюк И.А., Сенько О.В.

Машинное обучение и анализ данных. 2018. Т. 4. № 3. С. 142–151.

31. Data Mining in Institutional Economics Tasks

Kirilyuk I., Kuznetsova A., Senko O.



В сборнике: EPJ Web of Conferences. 9. Сер. «Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, ММСП 2017». 2018. С. 03013.

32. Использование методов интеллектуального анализа данных для исследования динамики институциональных показателей.

Кирилюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

В сборнике: «Социально-экономические проблемы современности: поиски междисциплинарных решений». Сборник научных трудов участников Международной конференции «XXIV Кондратьевские чтения». Под редакцией В.М. Бондаренко. 2017. С. 164–168.

33. Математическое описание работы макроэкономических подсистем в режиме переключающегося воспроизводства.

Кирилюк И.А., Малков С.Ю.

В сборнике: Стратегическое планирование и развитие предприятий. Материалы Восемнадцатого всероссийского симпозиума. Под редакцией Г.Б. Клейнера. 2017. С. 265–268.

34. Оптимизация сложности моделей анализа временных рядов в экономике

Кирилюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

В книге: Математические методы распознавания образов ММРО-2017. Тезисы докладов 18-й Всероссийской конференции с международным участием. М., 2017. С. 64–65.

35. Method for Detecting Significant Patterns in Panel Data Analysis.

Kirilyuk I.L., Kuznetsova A.V., Sen'ko O.V., Morozov A.M.

Pattern Recognition and Image Analysis. Advances in Mathematical Theory and Applications. 2017. Vol. 27. No 1. Pp. 94–104.

36. Экономико-математические модели для исследований мезоуровня экономики.

Кирилюк И.А.

Журнал институциональных исследований. 2017.  
Т. 9. № 3. С. 50–63.

37. Применение методов data mining в анализе панельных данных, характеризующих институциональные факторы экономик стран мира.

Кирилюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

Анализ и моделирование экономических и социальных процессов: Математика. Компьютер. Образование. 2017.  
Т. 24. № 5. С. 172–178.

38. Оптимизация сложности моделей анализа временных рядов в экономике.

Кирилюк И.А., Кузнецова А.В., Сенько О.В.

Математические методы распознавания образов. 2017.  
Т. 18. № 1. С. 64–65.

39. Новые исследования в гетеродоксальной экономике: российский вклад.

Автономов В.С., Автономов Ю.В., Макашева Н.А.,  
Рубинштейн А.Я., Нуреев Р.М., Кирдина С.Г., Фролов Д.П.,  
Ляско А.К., Дементьев В.Е., Устюжанина Е.В.,  
Клейнер Г.Б., Ерзнкян Б.А., Попов Е.В., Макаров В.А.,  
Чернавский Д.С., Старков Н.И., Иншаков О.В.,  
Маевский В.И., Малков С.Ю., Рубинштейн А.А. и др.  
Сер. Теоретическая экономика. Москва, 2016.

40. Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков.

Кирилюк И.А.

Компьютерные исследования и моделирование. 2016.  
Т. 8. № 5. С. 803–815.

41. Перспективы космизма как коллективного мировоззрения.

Кирилюк И.А.

- В сборнике: К.Э. Циолковский и этапы развития космонавтики. Материалы 50-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Ответственные за выпуск: Н.А. Абакумова, Г.А. Сергеева, Л.Н. Канунова., 2015. С. 256–257.
42. 2.1. Базовая модель социальных взаимодействий.  
Кирилюк И.А., Малков С.Ю.  
В книге: Анализ и моделирование мировой и страновой динамики: методология и базовые модели. М., 2015. С. 76–91.
43. Темпы экономического роста и характер отдачи факторов производства.  
Кирилюк И.А.  
В сборнике: «Синергетика в общественных и естественных науках». Материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи: в 3 частях. Отв. ред. Г.П. Лапина. 2015. С. 95–97.
44. Эмпирическая проверка теории институциональных матриц методами интеллектуального анализа данных.  
Кирилюк И.А., Волинский А.И., Круглова М.С., Кузнецова А.В., Рубинштейн А.А., Сенько О.В.  
Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 4. С. 923–939.
45. Методы моделирования производственных функций в макроэкономике.  
Кирилюк И.А.  
В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: Девятые Курдюмовские чтения. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. Ответственный редактор Лапина Г. П., 2013. С. 260.

46. Моделирование динамики конкурирующих сообществ: варианты взаимодействия.

Малков С.Ю., Кирилюк И.Л.

Информационные войны. 2013. № 2 (26). С. 49–56.

47. Модели производственных функций для российской экономики.

Кирилюк И.Л.

Компьютерные исследования и моделирование. 2013.

Т. 5. № 2. С. 293–312.

48. Семинару по трансгуманизму – пять лет.

Кирилюк И.Л.

Вестник Российского философского общества. 2010. № 2.

49. Российская модель институциональных изменений: опыт эмпирико-статистического исследования.

Кирдина С., Кирилюк И., Рубинштейн А., Толмачева И.

Вопросы экономики. 2010. № 11. С. 97–114.

50. Влияние особенностей производственных процессов на макроэкономическую устойчивость: базовая математическая модель.

Малков С.Ю., Кирилюк И.Л.

Стратегическая стабильность. 2009. № 4 (49). С. 32–39.

51. Особенности долгосрочной экономической динамики мировой системы: анализ статистических данных.

Кирилюк И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.

Прикладная эконометрика. 2009. № 4 (16). С. 34–45.

52. Экономическая динамика мир-системы: взаимодействие стран с разным уровнем развития.

Кирилюк И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.

В сборнике: История и Математика: Модели и теории.

Ежегодник. Сер. «Альманах “История и Математика”».

Ответственные редакторы Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев,

С.Ю. Малков. М., 2008. С. 102–119.

53. Особенности динамики экономического развития мир-системы: статистический анализ.

Кирилюк И.А., Малков С.Ю., Малков А.С.

Информационный бюллетень ассоциации «История и компьютер». 2008. № 35. С. 38–39.

54. Отслеживание контактных границ в tvd-схемах гидродинамики при помощи функции уровня.

Кирилюк И.А.

Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 3. С. 94–104.

55. Нелинейные особенности развития и взаимодействия социально-экономических систем.

Кирилюк И.А., Малков С.Ю., Малков А.С.

Стратегическая стабильность. 2007. № 2 (39). С. 63–68.

56. Отражение импульсов в хаотической среде.

Бубновский А.Ю., Кирилюк И.А., Шевцов Б.М.

Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 7. С. 840–848.

Pulse Reflection in a Chaotic Medium.

Bubnovskii A.Yu., Kirilyuk I.L., Shevtsov B.M.

Journal of Communications Technology and Electronics. 2005. Т. 50. № 7. С. 769–776.

57. Нестационарные отражения в хаотической среде.

Бубновский А.Ю., Кирилюк И.А., Шевцов Б.М.

Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 3. С. 422–431.

Nonstationary Reflections in a Chaotic Medium.

Bubnovskii A.Yu., Kirilyuk I.L., Shevtsov B.M.

Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2003. Vol. 39. No. 3. Pp. 380–390.

58. Chaotic Dynamics in a Nonautonomous Dicke Model Without the Rotating-Wave Approximation.

Kirilyuk I.L.

Optics and Spectroscopy. 2002. Vol. 92. No. 5. Pp. 719–726.

59. Control and Chaos of Atomic Rabi Oscillations in a Cavity.  
Kirilyuk I.L., Prants S.V.  
В сборнике: International Conference on Control of Oscillations and Chaos, Proceedings. 2nd International Conference on Control of Oscillations and Chaos (COC 2000). ST. Petersburg, Russia, 2000. Pp. 369–371.
60. A Homoclinic Scenario of Chaos in Coherent Atom-Field Dynamics.  
Makarov D.V., Konkov L.E., Kirilyuk I.L., Prants S.V.  
В книге: ICAP 2000 XVII International Conference on atomic physics. Conference abstracts. 2000. Pp. 413–414.
61. A Mechanism of Emergence of Hamiltonian Chaos in a Basic Quantum-Optical Model.  
Kirilyuk I.L., Prants S.V.  
Optika i Spektroskopiya. 2000. Vol. 89. No. 6. Pp. 978–983.  
A Mechanism of Emergence of Hamiltonian Chaos in a Basic Quantum-Optical Model.  
Kirilyuk I.L., Prants S.V.  
Optics and Spectroscopy. 2000. Vol. 89. No. 6. Pp. 901–906.
62. Dynamical Complexity in a Quantum-Optical Model With a Simple Lie-Algebraic Structure.  
Kirilyuk I.L., Kon'kov L.E., Prants S.V.  
Reports on Mathematical Physics. 1999. Vol. 43. No. 1–2. Pp. 195–205.
63. Semiclassical Interaction of Moving Two-Level Atoms With a Cavity Field: from Integrability to Hamiltonian Chaos.  
Prants S.V., Kon'kov L.E., Kirilyuk I.L.  
Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics. 1999. Vol. 60. No. 1. Pp. 335–346.
64. Chaotic Vacuum Rabi Oscillations With Moving Two-Level Atoms in Cavity QED: a New Kind of Reversible Spontaneous Emission.

Kirilyuk I.L., Kon'kov L.E., Prants S.V.

В сборнике: Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. 1999. Pp. 50–57.

65. Управление атомно-полевыми системами.

Пранц С.В., Дмитриева Е.В., Кирилюк И.Л., Коньков Л.Е.,  
Чудновский В.М.

Отчет о НИР № 96-02-19827. Российский фонд  
фундаментальных исследований. 1996.



Редакционно-издательский отдел:

Тел.: +7 (499) 129 0472

e-mail: [print@inecon.ru](mailto:print@inecon.ru)

[www.inecon.ru](http://www.inecon.ru)

Научное издание

И.А. Кирилюк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭКОНОМИКИ НА МАКРО- И МЕЗОУРОВНЕ  
(работы разных лет)

Редактор — Полякова А.В.  
Компьютерная верстка — Хацко Н.А.

Подписано в печать 29.09.2025 г.  
Заказ № 17. Тираж 300 экз. Объем 17,6 уч.-изд. л.  
Отпечатано в ИЭ РАН

ISBN 978-5-9940-0795-2



9 785994 007952 >