

**Gorbaneva OI, Murzin AD, Ougolnitsky GA.  
Public-Private Partnership in Regional  
Development as a Tool of Sustainable  
Management // J. of Sustainability Research  
2024; 6(3) :e240049**

Государственно-частное партнёрство выступает действенным инструментом решения стратегических задач устойчивого развития региональной системы. Предложена трёхуровневая модель управления устойчивым развитием региональной социо-эколого-экономической системы, представляющая собой *модификацию модели экономического роста Солоу с учётом механизмов иерархического управления, загрязнения окружающей среды, межрегионального взаимодействия и реализации проектов государственно-частного партнёрства*. Модель включает вложенные игры Штакельберга с несколькими ведомыми со специфическим определением множества оптимальных ответов. Выполнено численное исследование построенной модели с использованием данных официальной статистики по Южному федеральному округу Российской Федерации. Проведено обсуждение возможностей практического применения полученных результатов.

## Введение

Согласно известному определению, под устойчивым развитием понимается "a development that meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs" (Our Common Future, 1987). Это определение развивает концепцию "трёх столпов" (three pillars), выделяя три группы обязательных условий жизнеспособности (viability), образующих основу устойчивого развития: социальные, экономические и экологические. Однако этот общепринятый подход не отвечает на ключевой вопрос о субъекте исполнения требований устойчивого развития и его мотивации. Между тем, многолетний опыт показывает, что отсутствие реального субъекта управления делает любые стратегии устойчивого развития лишь простыми декларациями, не реализуемыми на практике. Поэтому авторская концепция управления устойчивым развитием постулирует помимо необходимости выполнения условий жизнеспособности обязательность учета и согласования интересов активных агентов устойчивого развития (Ougolnitsky 2011, 2014, 2015).

При согласовании интересов основными субъектами выступают общество, власть и бизнес. В качестве механизма согласования их интересов выступают проекты государственно-частного партнёрства. Государственно-частное партнёрство (ГЧП) Public-Private Partnership (PPP) - чрезвычайно распространённая и перспективная форма привлечения частного бизнеса к решению значимых задач развития экономической и социальной инфраструктуры на уровне региональной системы. При инициации проектов ГЧП общество предъявляет потребности и контролирует их удовлетворение, властные структуры организуют процесс и обеспечивают условия реализации проектов, бизнес-партнёры за счет собственных и привлеченных ресурсов фактически реализуют проектные задачи. Характерными направлениями реализации проектов ГЧП выступают экологические задачи, строительство дорог и общественных зданий, развитие транспортной сети и коммуникационных сетей.

Чрезвычайная сложность объекта исследования, высокая стоимость и трудоёмкость, а в большинстве случаев и полное отсутствие возможности проведения натуральных экспериментов в региональных социально-экономических системах повышают ценность математического моделирования проблем управления устойчивым развитием и использование соответствующих информационных технологий исследования моделей. Наиболее адекватным инструментом математического анализа учёта и согласования интересов активных агентов служат динамические теоретико-игровые модели с иерархической структурой (игры Штакельберга).

В ряде предшествующих публикаций мы использовали игры Штакельберга для анализа проектов ГЧП и межрегионального взаимодействия (Anopchenko et al., 2019a,b; Gorbaneva et al., 2021). При этом для описания управляемой динамики состояния региональной социо-эколого-экономической системы использовалась известная модель экономического роста Солоу (Solow, 1956), дополненная учётом факторов загрязнения окружающей среды и межрегионального взаимодействия.

**Вклад настоящей работы состоит в следующем:**

- проведён системный анализ проблемы управления устойчивым развитием региональной социо-эколого-экономической системы с учётом проектов ГЧП и предложены соответствующие модельные гипотезы;

- на этой основе построена математическая модель, представляющая собой сложную динамическую задачу конфликтного управления с иерархической структурой и фазовыми ограничениями;

- выполнено численное исследование построенной модели с использованием реальных данных статистики по Южному федеральному округу Российской Федерации;

- проведено обсуждение полученных результатов и возможностей их практического использования.

## Обзор литературы

Теории устойчивого развития (sustainability science) за последние полвека посвящено огромное число публикаций: отметим, например, (Adams, Jeanrenaud, 2008; Clark, 2007; Clark, Dickson, 2003; Kates et al., 2001). Критика этой теории и альтернативные концепции представлены в (Zaccai, 2012). Математической формализации ключевых для устойчивого развития условий жизнеспособности посвящена монография (Aubin, 1991) и ряд развивающих её публикаций (Cairns, Long, 2006; Doyen, Martinet, 2012; Martinet, Doyen, 2007).

Динамические игры Штакельберга и их приложения к моделированию эколого-экономических систем анализируются в (Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000).

Виды ГЧП, способы его организации и финансирования, области приложения весьма разнообразны (Celucci, 2011; Engel et al., 2014; Geddes, 2017; Morley, 2015; Yescombe, 2007). Российская специфика проектов ГЧП анализируется в статьях (Shkred, Murzin, 2020; Trotsenko, 2018). Ключевую роль в успехе проектов ГЧП играет согласование интересов их участников. Поэтому наиболее естественный аппарат моделирования ГЧП предоставляет теория контрактов (Iossa, Martimort, 2008; Journal, 2015; Maskin, Tirole, 2008). Имеется множество публикаций, посвящённых различным частным моделям ГЧП (Belenky, 2013; Lavlinskii et al., 2016; Osei-Kuei and Chan 2019; Peng et al., 2014), в т.ч. с использованием игр Штакельберга (Lavlinskii et al., 2019).

Авторская теория управления устойчивым развитием (sustainable management) представлена в работах (Ougolnitsky 2011, 2014, 2015). Модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов (SPICE-models) описаны в (Gorbaneva, Ougolnitsky, 2020). В работе (Gorbaneva et al., 2021) эти модели применены к анализу проектов ГЧП, дан подробный обзор указанной тематики. Системный анализ управления устойчивым развитием на региональном уровне проведён в статьях (Ougolnitsky 2017; Ougolnitsky et al., 2018). В работе (Anopchenko et al., 2019b) рассматривается региональный аспект проектов ГЧП с учётом инновационного развития экономики. В статье (Anopchenko et al., 2019a) описано применение модифицированной модели Солоу с учётом загрязнения окружающей среды и межрегионального взаимодействия для решения задачи управления устойчивым развитием Южного федерального округа Российской Федерации.

# Системный анализ и модельные гипотезы

Концептуальная схема иерархического воздействия на региональную социо-эколого-экономическую систему с учётом требований устойчивого развития показана на рис.1.

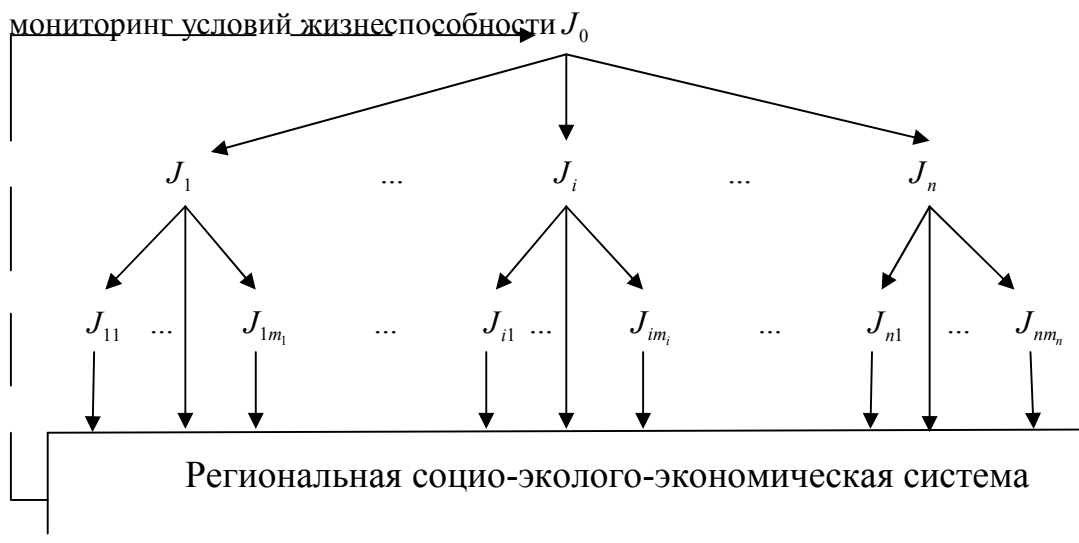


Рис.1. Концептуальная схема иерархического воздействия на региональную социо-эколого-экономическую систему с учётом требований устойчивого развития:  $J_0$  - Центр (федеральное правительство или его уполномоченный координирующий орган макрорегионального уровня);  $J_i$  - супервайзеры (региональные администрации);  $J_{ij}$  - агенты (бизнес-партнёры по проектам ГЧП)

При формализации этой концептуальной схемы для построения математической модели приняты следующие гипотезы.

1. Иерархическое воздействие на региональную социо-эколого-экономическую систему представляет собой трёхуровневую систему управления. На верхнем уровне расположено федеральное правительство или его уполномоченный координирующий орган макрорегионального уровня (Центр, Principal, he). На среднем уровне находятся региональные администрации (супервайзеры, supervisors, she). Нижний уровень представлен коммерческими организациями (бизнес-партнёрами), участвующими в реализации проектов ГЧП (агенты, agents, he).
2. Для описания динамики региональной социо-эколого-экономической системы используется модель экономического роста Солоу (Solow, 1956), модифицированная с учётом иерархических механизмов управления, загрязнения окружающей среды, межрегионального финансового взаимодействия и реализации проектов ГЧП.
3. Взаимодействие между верхним и средним и между средним и нижним уровнями управления рассматривается как динамическая иерархическая игра (dynamic Stackelberg game) типа ведущий - n ведомых (leader - n followers) в программных стратегиях (open

loop). Нахождение решений этих игр формализует согласование интересов активных участников регионального взаимодействия как необходимого условия обеспечения устойчивого развития.

4. Экологические условия жизнеспособности региональной социо-эколого-экономической системы состоят в непревышении суммарными за период рассмотрения выбросами загрязняющих веществ в атмосферу и почву заданных пороговых значений (предельно допустимых выбросов). Экономические условия заключаются в том, что суммарный валовый продукт супервайзеров за период рассмотрения должен быть не меньше заданного порогового значения. Социальные условия учитываются двояко. Во-первых, интерес Центра (отражаемый его функционалом выигрыша) состоит в максимизации суммарного потребления супервайзеров (точнее, населения руководимых ими регионов). Во-вторых, дополнительное требование заключается в том, чтобы суммарный выигрыш супервайзеров (произведённое при реализации проектов ГЧП общественное благо) за период рассмотрения был не меньше заданного порогового значения. Выполнение указанных условий является главной целью Центра, что формализуется в виде обязательных фазовых ограничений в его задаче управления.

5. Для обеспечения устойчивого развития Центр распоряжается следующими управляющими переменными для каждого супервайзера: доля общих производственных инвестиций в валовом продукте; доля ассигнований на реализацию проектов ГЧП; доли инвестиций в экономику других супервайзеров; ассигнования на борьбу с загрязнением окружающей среды. Тем самым предполагается, что значения этих управляющих переменных определяются на федеральном уровне.

6. Взаимодействие между супервайзером и агентами осуществляется по поводу реализации региональных проектов ГЧП. Агент распределяет свой ресурс между реализацией проекта ГЧП (производством некоторого общественного блага) и иными видами деятельности. Соответственно, его выигрыш складывается из дохода от иных видов деятельности и участия в полезности от произведённого общественного блага. Интерес супервайзера состоит в максимизации общественного блага, при этом он назначает коэффициенты участия агентов в полезности от этого блага и величины выделяемых агентам ресурсов.

7. Капитал супервайзера делится на общую часть и часть, производимую при реализации проектов ГЧП. Динамика общей части регулируется управлениями Центра в его игре с супервайзерами, а динамика ГЧП-части - управлениями супервайзера в его игре с агентами.

## Математическая модель

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n C_i(t) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$0 \leq s_i(t) \leq 1; \quad (2)$$

$$k_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} = 1; \quad (3)$$

$$v_i^a(t) \geq 0, v_i^w(t) \geq 0; \quad (4)$$

$$0 \leq B_i(t) \leq 1; \quad (5)$$

$$J_i = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} [1 - s_{ij}(t)] g_{ij}(u_{ij}(t)) \rightarrow \max \quad (6)$$

$$r_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = R_i(t); \quad (7)$$

$$0 \leq s_{ij}(t) \leq 1; \quad (8)$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^T \delta^t [p_{ij}(r_{ij}(t) - u_{ij}(t)) + s_{ij}(t)g_{ij}(u_{ij}(t))] \rightarrow \max \quad (9)$$

$$0 \leq u_{ij}(t) \leq r_{ij}(t); \quad (10)$$

$$Y_i(t) = A_i(t)[K_i(t)]^{\alpha_i} [E_i(t)L_i(t)]^{1-\alpha_i}; \quad (11)$$

$$I_i(t) = s_i(t)Y_i(t); \quad (12)$$

$$R_i(t) = B_i(t)Y_i(t); \quad (13)$$

$$C_i(t) = [1 - s_i(t) - B_i(t)]Y_i(t); \quad (14)$$

$$E_i(t+1) = (1 + \eta_i)E_i(t), E_i(0) = E_{i0}; \quad (15)$$

$$L_i(t+1) = (1 + b_i - d_i)L_i(t), L_i(0) = L_{i0}; \quad (16)$$

$$K_i(t+1) = K_i^G(t+1) + \sum_{j=1}^n K_j^P(t+1) + \sum_{j=1}^n k_{ji}(t)I_j(t); \quad (17)$$

$$K_i^G(t+1) = (1 - \mu_i)K_i^G(t), K_i^G(0) = K_{i0}^G; \quad (18)$$

$$K_i^P(t+1) = (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}^*(u_{ij}^*(t)), K_i^P(0) = K_{i0}^P; \quad (19)$$

$$P_i^a(t) = [1 - c_i^a v_i^a(t) I_i(t)] [B_{K_i}^a K_i(t) + B_{L_i}^a L_i(t)]; \quad (20)$$

$$P_i^w(t) = [1 - c_i^w v_i^w(t) I_i(t)] [B_{K_i}^w K_i(t) + B_{L_i}^w L_i(t)]; \quad (21)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n Y_i(t) \geq Y^*; \quad (22)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n P_i^a(t) \leq P_a^*; \quad (23)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n P_i^w(t) \leq P_w^*; \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n J_i \geq J^*; \quad (25)$$

$$u_i(t) = (u_{i1}(t), \dots, u_{im_i}(t)); t = 1, \dots, T; j = 1, \dots, m_i; i = 1, \dots, n.$$

Здесь (1)-(5) - задача управления Центра с учётом условий жизнеспособности (22)-(25); (6)-(8) - задача управления  $i$ -го супервайзера; (9)-(10) - задача управления  $ij$ -го агента; (11)-(17) - уравнения динамики региональной социо-эколого-экономической системы с учётом дополнительных предположений (18)-(19). Обозначения модели:  $J_0, J_i, J_{ij}$  - функционалы выигрыша Центра, супервайзеров и агентов соответственно; *переменные управления Центра по отношению к  $i$ -му супервайзеру*:  $s_i$  - доля общих производственных инвестиций в валовом продукте;  $B_i$  - доля ассигнований на реализацию проектов ГЧП;  $k_{ij}$  - доля инвестиций  $i$ -го супервайзера в экономику  $j$ -го супервайзера (в т.ч. в свою собственную при  $i = j$ );  $v_i^a, v_i^w$  - ассигнования на борьбу с загрязнением атмосферы и воды соответственно; *переменные управления супервайзеров по отношению к агентам*:  $r_{ij}$  - ресурс (бюджет), выделяемый агенту на реализацию проекта ГЧП;  $s_{ij}$  - доля участия агента в прибыли от реализации проекта ГЧП; *переменные управления агентов*:  $u_{ij}$  - доля ресурса агента, выделяемая на реализацию проекта ГЧП; *переменные состояния  $i$ -го супервайзера*:  $Y_i$  - валовый продукт;  $I_i$  - общие производственные инвестиции;  $R_i$  - бюджет реализации проектов ГЧП;  $C_i$  - объём потребления населения региона;  $L_i$  - трудовые ресурсы;  $E_i$  - эффективность использования трудовых ресурсов;  $K_i$  - общий капитал;  $K_i^P$  - капитал при реализации проектов ГЧП;  $K_i^G$  - капитал в остальных сферах деятельности;  $P_i^a, P_i^w$  - выбросы загрязняющих веществ в атмосферу и воду соответственно;



*модельные функции:*  $A_i$  - функция влияния инвестиционной активности на производство валового продукта;  $g_i$  - функция производства общественного блага при реализации проекта ГЧП;  $p_{ij}$  - функция дохода от иных видов деятельности;

*модельные параметры  $i$ -го супервайзера:*  $\alpha_i$  - параметр производственной функции Кобба-Дугласа;  $\eta_i$  - параметр роста эффективности трудовых ресурсов;  $\mu_i$  - коэффициент амортизации капитала;  $a_i$  - коэффициент эффективности при реализации проектов ГЧП;  $b_i, d_i$  - коэффициенты воспроизводства и выбытия трудовых ресурсов;  $c_i^a, c_i^w$  - коэффициенты эффективности природоохранных ассигнований;  $B_{Ki}^a, B_{Ki}^w$  - удельные выбросы загрязняющих веществ при производственной деятельности в атмосферу и воду соответственно;  $B_{Li}^a, B_{Li}^w$  - удельные выбросы при жизнедеятельности трудовых ресурсов в атмосферу и воду соответственно;  $E_{i0}, L_{i0}, K_{i0}^G, K_{i0}^P$  - заданные начальные значения соответствующих переменных;

*общие модельные параметры:*  $T$  - длина периода рассмотрения (в годах);  $n$  - общее число супервайзеров;  $m_i$  - число агентов  $i$ -го супервайзера;  $\delta \in (0,1)$  - коэффициент дисконтирования;  $Y^*, P_a^*, P_w^*, J^*$  - пороговые значения, определяющие условия жизнеспособности.

Модель (1)-(25) представляет собой сложную динамическую задачу управления с фазовыми ограничениями. Работа с моделью организуется следующим образом.

1. Для каждого супервайзера  $i = 1, \dots, n$  решается игра Штакельберга (6)-(10), в которой множеством оптимальных ответов агентов на стратегию супервайзера считается равновесие Нэша в игре агентов в нормальной форме. При этом полагаем, что  $R_i(t) \equiv \bar{R}_i, t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n$ . Это объясняется тем, что при планировании на период  $t = 1, \dots, T$  супервайзеры не знают бюджетов, которые будут выделены им в будущем, и исходят из известного начального значения  $\bar{R}_i$ . Находится равновесие Штакельберга в программных стратегиях

$$\{r_{ij}^*(t), s_{ij}^*(t), u_{ij}^*(t)\}_{j=1}^{m_i}, i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

Вычисляются соответствующие равновесные значения общественного блага  $g_i^*(u_i^*(t))$  для подстановки в (19).

2. Центр решает задачу (1)-(5), (11)-(21) с фазовыми ограничениями (22)-(25), считая оптимальным ответом супервайзеров на выбор своих стратегий (2)-(5) найденные на предыдущем шаге равновесные стратегии (26) с учётом выбранных там же равновесных стратегий агентов. Теперь значения  $R_i(t)$  пересчитываются по формуле (13) с учётом всей системы уравнений динамики и значений управляющих переменных.

## Аналитическое исследование модели

В модели (1)-(25) ищется равновесие по Штакельбергу (19). Для этого начнём решать задачу нижнего уровня (9)-(10). Заметим, что уравнения динамики (11)-(21) не зависят от действий агентов нижнего уровня, а выполнение условий устойчивого развития (22)-(25) не входит в сферу их интересов. Это значит, что несмотря на то, что задача является динамической, ее можно свести к  $T$  статическим задачам

$$p_{ij}(r_{ij}(t) - u_{ij}(t)) + s_{ij}(t)g_{ij}(u_{ij}(t)) \rightarrow \max \quad (27)$$

при ограничении (10). Решение этой задачи  $u_{ij}^{max}(t)$  является оптимальным ответом агента нижнего уровня на управление супервайзера  $s_{ij}(t)$  и  $r_{ij}(t)$ . После нахождения оптимальной реакции  $u_{ij}^{max}(t)$  нижнего уровня на стратегию супервайзера можно, подставив её в (6), найти оптимальное управление  $s_{ij}(t)$ ,  $r_{ij}(t)$  супервайзера в задаче (6)-(8). Но и эту задачу можно свести к  $T$  задачам вида

$$\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}[1 - s_{ij}(t)]g_{ij}(u_{ij}^{max}(t)) \rightarrow \max \quad (28)$$

$$r_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i; \quad (29)$$

$$1 \geq s_{ij}(t) \geq 0.$$

При нахождении величин  $s_{ij}(t)$  можно каждую из задач (28) разделить на  $m_i$  подзадач вида

$$[1 - s_{ij}(t)]g_{ij}(u_{ij}^{max}(t)) \rightarrow \max, \quad (30)$$

так как значения величин  $s_{ij}(t)$  влияют только на выигрыш агента нижнего уровня  $j$ , но не на выигрыш и поведение остальных агентов нижнего уровня.

Несмотря на значительное упрощение задачи (6)-(10) и сведение ее к  $T$  задачам вида (27)-(30), (8), (10), конкретный вид равновесия по Штакельбергу зависит от вида функций  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$ . Эти функции являются производственными, а значит либо линейными, либо степенными вогнутыми.

Рассмотрим все четыре возможные сочетания видов функций  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$ : 1)  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$  линейны; 2)  $p_{ij}(\cdot)$  – степенная вогнутая,  $g_{ij}(\cdot)$  – линейная, 3)  $p_{ij}(\cdot)$  – линейная,  $g_{ij}(\cdot)$  – степенная вогнутая; 4)  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$  – степенные вогнутые.

Случай 1. Функции  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$  линейны, т.е. имеют вид  $p_{ij}(x) = p_{ij} \cdot x$ ,  $g_{ij}(x) = g_{ij} \cdot x$ .

В этом случае задача (27), (10) имеет вид

$$p_{ij} \cdot (r_{ij}(t) - u_{ij}(t)) + s_{ij}(t)g_{ij} \cdot u_{ij}(t) \rightarrow \max,$$

$$0 \leq u_{ij}(t) \leq r_{ij}(t).$$

Найдем производную целевой функции по переменной  $u_{ij}$ :

$$-p_{ij} + s_{ij}(t)g_{ij}.$$

Она не зависит от искомой переменной  $u_{ij}$ , поэтому имеет постоянное значение, в зависимости от знака которого определяется оптимальное значение  $u_{ij}^{max}(t)$ :

$$u_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} r_{ij}(t), & s_{ij}(t)g_{ij} > p_{ij}, \\ 0, & s_{ij}(t)g_{ij} < p_{ij}. \end{cases} \quad (31)$$

Оптимальная реакция агента нижнего уровня на стратегию супервайзера найдена. Агент тратит все ресурсы либо только на общие интересы, либо только на частные. Первых агентов назовем коллективистами, вторых – индивидуалистами. Введем два множества: множество коллективистов  $C_i(t) = \{j | u_{ij}^{max}(t) = r_{ij}(t)\}$  и множество индивидуалистов  $I_i(t) = \{j | u_{ij}^{max}(t) = 0\}$ . Эти множества мы будем использовать и для исследования случаев 2-4.

Перейдем к задаче супервайзера. Подставим зависимость (31) в (28). Получим задачу

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C_i} a_{ij} [1 - s_{ij}(t)] g_{ij} \cdot r_{ij}(t) &\rightarrow \max, \\ r_{ij}(t) &\geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i; \\ 1 &\geq s_{ij}(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Сначала найдем оптимальные стратегии  $s_{ij}(t)$ . Индивидуалисты не фигурируют в (32), поэтому значение  $s_{ij}(t)$  для индивидуалистов безразлично, так как они не образуют общественный доход, а значит и любая доля от нуля равна нулю. Примем их значение  $s_{ij}(t)=0$ . Что же касается коллективистов, то функция (32) убывает по значению  $s_{ij}(t)$ , поэтому оно должно быть как можно меньше, но так, чтобы агент оставался коллективистом, так как только они участвуют в целевой функции (32). Каждому агенту-коллективисту в сумме (32) соответствует положительное слагаемое, поэтому чем больше слагаемых, тем лучше для супервайзера. Поэтому чем большему количеству агентов супервайзер сможет обеспечить выполнение  $s_{ij}(t)g_{ij} > p_{ij}$ , тем ему лучше. Чтобы агент был коллективистом, нужно, чтобы  $s_{ij}(t) > \frac{p_{ij}}{g_{ij}}$ , что возможно только при  $p_{ij} < g_{ij}$ . А чтобы при этом достигался максимум в (32), требуется выполнение условия  $s_{ij}^{max}(t) = \frac{p_{ij}}{g_{ij}} + \varepsilon$ . Итак,

$$s_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{g_{ij}} + \varepsilon, & g_{ij} > p_{ij}, \\ 0, & g_{ij} < p_{ij}. \end{cases}$$

Подставим найденное соотношение в (32) и получим задачу на поиск оптимальной величины  $r_{ij}(t)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C_i} a_{ij} \left[1 - \frac{p_{ij}}{g_{ij}}\right] g_{ij} \cdot r_{ij}(t) &= \sum_{j \in C_i} a_{ij} (g_{ij} - p_{ij}) \cdot r_{ij}(t) \rightarrow \max, \\ r_{ij}(t) &\geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i; \end{aligned} \quad (34)$$

Задача (34), (29) является задачей линейного программирования, её решение находится следующим образом. Пусть  $k$  – номер того агента, у которого максимальна величина  $a_{ij}(g_{ij} - p_{ij})$ , т.е.  $k = \arg \max_{j \in C_i} \{a_{ij}(g_{ij} - p_{ij})\}$ . Заметим, что  $k$  не зависит от времени  $t$ . Тогда

$$r_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} \bar{R}_i, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Т.е. в случае линейных функций общего и частного дохода все ресурсы супервайзер отдает одному агенту – тому, кто может принести больший доход супервайзеру. Остальные агенты не создают общественный доход и не участвуют в его распределении. Кроме того, заметим, что стратегии  $s_{ij}^{max}(t)$  и  $r_{ij}^{max}(t)$  не зависят от времени, а значит и стратегии агентов  $u_{ij}^{max}(t)$  не зависят от времени. Поэтому бесполезно надеяться, что со временем агент или супервайзер могут изменить свою стратегию.

Доход агентов:

$$J_{ij} = \begin{cases} [p_{ij} + \varepsilon g_{ij}] \sum_{t=1}^T \delta^t R_i(t) \rightarrow \max, & i = k, p_{ik} < g_{ik}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доход супервайзера:

$$J_i = a_{ik} [g_{ik} - p_{ik} - \varepsilon g_{ik}] \sum_{t=1}^T \delta^t \cdot R_i(t).$$

Случай 2. Функции  $p_{ij}(\cdot)$  – степенная вогнутая,  $g_{ij}(\cdot)$  – линейная, т.е. имеют вид  $p_{ij}(x) = p_{ij} \cdot x^\alpha$ ,  $g_{ij}(x) = g_{ij} \cdot x$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

В этом случае задача (27), (10) имеет вид

$$p_{ij} \cdot (r_{ij}(t) - u_{ij}(t))^\alpha + s_{ij}(t) g_{ij} \cdot u_{ij}(t) \rightarrow \max, \\ 0 \leq u_{ij}(t) \leq r_{ij}(t).$$

Условие первого порядка имеет вид:

$$\frac{p_{ij} \alpha}{(r_{ij}(t) - u_{ij}(t))^{1-\alpha}} = s_{ij}(t) g_{ij}$$

Отсюда найдем оптимальное значение  $u_{ij}^{max}(t)$ :

$$u_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} r_{ij}(t) - \sqrt[1-\alpha]{\frac{p_{ij} \alpha}{s_{ij}(t) g_{ij}}}, & \frac{p_{ij} \alpha}{s_{ij}(t) g_{ij}} < r_{ij}^{1-\alpha}(t), \\ 0, & \frac{p_{ij} \alpha}{s_{ij}(t) g_{ij}} > r_{ij}^{1-\alpha}(t). \end{cases} \quad (35)$$

Оптимальная реакция агента нижнего уровня на стратегию супервайзера найдена. Заметим, что в этом случае нет коллективистов, так как под корнем в (35) выражение положительное. Введем дополнительное множество:  $C'_i(t) = \{j | 0 < u_{ij}^{max}(t) < r_{ij}(t)\}$  – множество агентов, не являющихся коллективистами или индивидуалистами. Эти агенты часть средств направляют на реализацию общественных интересов, а часть – на реализацию частных интересов.

Перейдем к задаче супервайзера. Подставим зависимость (35) в (28). Получим

$$\sum_{j \in C'_i(t)} a_{ij} [1 - s_{ij}(t)] g_{ij} \cdot \left( r_{ij}(t) - \sqrt[1-\alpha]{\frac{p_{ij} \alpha}{s_{ij}(t) g_{ij}}} \right) \rightarrow \max, \quad (36) \\ r_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i; \\ 1 \geq s_{ij}(t) \geq 0.$$

Сначала найдем оптимальные стратегии  $s_{ij}(t)$ . Индивидуалисты, как и в случае линейных функций, не фигурируют в (36), поэтому значение  $s_{ij}(t)$  для них безразлично, можно взять  $s_{ij}(t)=0$ . Что же касается неиндивидуалистов, то задача (36), (29), (8) распадается на  $m_i$  задач вида

$$[1 - s_{ij}(t)] \cdot \left( r_{ij}(t) - \sqrt[1-\alpha]{\frac{p_{ij} \alpha}{s_{ij}(t) g_{ij}}} \right) \rightarrow \max, \\ 1 \geq s_{ij}(t) \geq 0.$$

Условия первого порядка имеет вид

$$-r_{ij}(t) + {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_{ij}\alpha}{s_{ij}(t)g_{ij}}} + [1 - s_{ij}(t)] \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_{ij}\alpha}{s_{ij}^{2-\alpha}g_{ij}}} = 0. \quad (37)$$

Для решения (37) можно применить любой пригодный численный метод или путём перебора найти значение, приближённое с удовлетворяющей супервайзера точностью. Но для решения уравнения (37) нужно знать значение  $r_{ij}(t)$ .

Что же касается нахождения оптимальных значений  $r_{ij}(t)$ , то заметим, что задача (36), (29) является задачей линейного программирования, и её решение находится способом, аналогичным случаю 1. Пусть  $k$  – номер того агента, у которого максимальна величина  $a_{ij}(1 - s_{ij})g_{ij}$ , т.е.  $k = \arg \max_{j \in C_i} \{a_{ij}(1 - s_{ij})g_{ij}\}$ :

$$r_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} \bar{R}_i, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Проблема в том, что в этом случае для определения агента  $k$  нужно знать  $s_{ij}$ , для нахождения которых из (37) нужно знать  $r_{ij}$ .

В этом случае можно воспользоваться тем, что стратегия  $r_{ij}^{max}(t)$  может принимать всего два значения. Тогда для каждого агента  $j$  можно найти из (37) соответствующую ему стратегию супервайзера  $s_{ij}^{max}(t)$  в предположении, что  $r_{ij}(t) = \bar{R}_i$ . Из всех агентов выбрать в качестве  $k$  того, у которого максимальна величина  $a_{ij}(1 - s_{ij}^{max}(t))g_{ij}$ . Заметим, что здесь уже стратегия  $s_{ij}^{max}(t)$  зависит от времени, так как зависит от конкретного значения  $r_{ij}(t)$ .

Случай 3. Функции  $p_{ij}(\cdot)$  – линейная,  $g_{ij}(\cdot)$  – степенная вогнутая, т.е. имеют вид  $p_{ij}(x) = p_{ij} \cdot x$ ,  $g_{ij}(x) = g_{ij} \cdot x^\alpha$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

В этом случае задача (27), (10) принимает вид

$$p_{ij} \cdot (r_{ij}(t) - u_{ij}(t)) + s_{ij}(t)g_{ij} \cdot u_{ij}(t)^\alpha \rightarrow \max, \\ 0 \leq u_{ij}(t) \leq r_{ij}(t).$$

Условие первого порядка имеет вид:

$$p_{ij} = \frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{u_{ij}(t)^{1-\alpha}}$$

Отсюда найдём оптимальное значение  $u_{ij}^{max}(t)$ :

$$u_{ij}^{max}(t) = \begin{cases} r_{ij}(t), & \frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}} > r_{ij}^{1-\alpha}(t), \\ {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}}}, & \frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}} < r_{ij}^{1-\alpha}(t). \end{cases} \quad (38)$$

Оптимальная реакция агента нижнего уровня на стратегию супервайзера найдена. Заметим, что в этом случае, в отличие от случая 2, нет индивидуалистов, так как под корнем в (38) выражение положительное.

Перейдём к задаче супервайзера. Подставим зависимость (35) в (28). Получим задачу

$$\sum_{j \in C_i(t)} a_{ij}[1 - s_{ij}(t)]g_{ij} \cdot ({}^{1-\alpha}\sqrt{r_{ij}(t)})^\alpha + \sum_{j \in C_i'(t)} a_{ij}[1 - s_{ij}(t)]g_{ij} \cdot \left( {}^{1-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}}} \right)^\alpha \rightarrow \max, \quad (39)$$

$$r_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i; \\ 1 \geq s_{ij}(t) \geq 0.$$

Сначала найдём оптимальные стратегии  $s_{ij}(t)$ . Для коллективистов  $s_{ij}(t)$  должно быть как можно меньше (так как соответствующее слагаемое в (39) убывает по  $s_{ij}(t)$ ), но таким, чтобы агент оставался коллективистом, т.е.  $s_{ij}(t) = \frac{r_{ij}^{1-\alpha}(t)p_{ij}}{\alpha g_{ij}} + \varepsilon$ . Это возможно, если  $r_{ij}^{1-\alpha}(t)p_{ij} < \alpha g_{ij}$ . Что касается неколлективистов, то условие первого порядка даёт

$$-\left(1-\alpha\sqrt{\frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}}}\right)^{\alpha} + [1-s_{ij}(t)] \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(1-\alpha\sqrt{\frac{\alpha g_{ij}}{p_{ij}}}\right)^{\alpha} s_{ij}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}(t) = 0.$$

Поделив на соответствующую ненулевую величину  $\left(1-\alpha\sqrt{\frac{\alpha g_{ij}}{p_{ij}}}\right)^{\alpha}$ , получим

$$\left(1-\alpha\sqrt{s_{ij}(t)}\right)^{\alpha} \left(-1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{1}{s_{ij}(t)} - 1\right)\right) = 0.$$

Отсюда  $s_{ij}(t) = 0$  либо  $s_{ij}(t) = \alpha$ . Проверка условий второго порядка показывает, что  $s_{ij}(t) = 0$  является точкой минимума. Подставим полученные значения  $s_{ij}(t)$  в (39), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in C_i(t)} a_{ij} \left(1 - \frac{r_{ij}^{1-\alpha}(t)p_{ij}}{\alpha g_{ij}} - \varepsilon\right) g_{ij} \cdot r_{ij}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} + \sum_{j \in C_i'(t)} a_{ij} (1-\alpha) g_{ij} \cdot \left(1-\alpha\sqrt{\frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}}}\right)^{\alpha} = \\ & = \sum_{j \in C_i(t)} \frac{a_{ij}}{\alpha} ((1-\varepsilon)\alpha g_{ij} - r_{ij}^{1-\alpha}(t)p_{ij}) \cdot r_{ij}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} + \sum_{j \in C_i'(t)} a_{ij} (1-\alpha) g_{ij} \cdot \\ & \left(1-\alpha\sqrt{\frac{\alpha s_{ij}(t)g_{ij}}{p_{ij}}}\right)^{\alpha} \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что все ресурсы нужно распределить только между коллективистами с учётом условия (29). Далее аналитически задачу исследовать невозможно.

Случай 4. Функции  $p_{ij}(\cdot)$  и  $g_{ij}(\cdot)$  – степенные вогнутые, т.е. имеют вид  $p_{ij}(x) = p_{ij} \cdot x^{\alpha}$ ,  $g_{ij}(x) = g_{ij} \cdot x^{\alpha}$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

В этом случае задача (27), (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & p_{ij} \cdot (r_{ij}(t) - u_{ij}(t))^{\alpha} + s_{ij}(t) g_{ij} \cdot u_{ij}(t)^{\alpha} \rightarrow \max, \\ & 0 \leq u_{ij}(t) \leq r_{ij}(t). \end{aligned}$$

Условие первого порядка имеет вид:

$$\frac{p_{ij}}{(r_{ij}(t) - u_{ij}(t))^{1-\alpha}} = \frac{s_{ij}(t) g_{ij}}{u_{ij}(t)^{1-\alpha}}$$

Отсюда найдём оптимальное значение  $u_{ij}^{\max}(t)$ :

$$u_{ij}^{\max}(t) = \frac{1-\alpha\sqrt{s_{ij}(t)g_{ij}}}{1-\alpha\sqrt{p_{ij}}+1-\alpha\sqrt{s_{ij}(t)g_{ij}}} r_{ij}(t). \quad (38)$$

Оптимальная реакция агента нижнего уровня на стратегию супервайзера найдена. Заметим, что здесь, в отличие от случаев 2 и 3, нет ни индивидуалистов, ни коллективистов.

Перейдем к задаче супервайзера. Подставим зависимость (35) в (28). Получим задачу

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} [1 - s_{ij}(t)] g_{ij} \cdot \left(\frac{1-\alpha\sqrt{s_{ij}(t)g_{ij}}}{1-\alpha\sqrt{p_{ij}}+1-\alpha\sqrt{s_{ij}(t)g_{ij}}}\right)^{\alpha} \cdot r_{ij}(t)^{\alpha} \rightarrow \max, \quad (39)$$

$$r_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} r_{ij}(t) = \bar{R}_i;$$

$$1 \geq s_{ij}(t) \geq 0.$$

Случаи 1 и 2 удалось полностью исследовать аналитически, а вот случаи 3 и 4 аналитически неразрешимы. Дело ещё усложняется тем, что при нахождении оптимальных стратегий супервайзера  $s_{ij}(t)$  и  $r_{ij}(t)$  получаются соотношения, при которых  $s_{ij}(t)$  зависит от  $r_{ij}(t)$ , а  $r_{ij}(t)$  зависит от  $s_{ij}(t)$ . И хотя чисто теоретически это – не проблема, надо, допустим, вместо  $s_{ij}(t)$  в целевую функцию (28) подставить её зависимость от  $r_{ij}(t)$ , а получившуюся задачу нелинейного программирования от переменных  $r_{ij}(t)$  решить с учетом условия (29) методом множителей Лагранжа, но на практике аналитически разрешить эту задачу нельзя. Здесь можно предложить решение задачи (28)-(29) при фиксированных стратегиях  $s_{ij}(t)$  или задач (30)-(8) при фиксированных стратегиях  $r_{ij}(t)$ , т.е. применить отдельно экономические механизмы стимулирования либо распределением ресурсов, либо управлением долей участия в общем доходе. Мы это оставим для будущих исследований, ограничившись далее в этой статье результатами, полученными при исследовании случаев 1 и 2.

Перейдем теперь к задаче верхнего уровня – Принципала. Он решает задачу (1) с ограничениями (2)-(5) и уравнениями динамики системы (11)-(21) с условиями устойчивого развития. В целевую функцию агента

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n C_i(t) \rightarrow \max$$

подставим выражение (14):

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n C_i(t) = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n [1 - s_i(t) - B_i(t)] Y_i(t).$$

В свою очередь, подставим сюда выражение (11):

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n [1 - s_i(t) - B_i(t)] A_i(t) [K_i(t)]^{\alpha_i} [E_i(t) L_i(t)]^{1-\alpha_i}$$

В получившееся выражение подставим (17):

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n [1 - s_i(t) - B_i(t)] A_i(t) \times$$

$$\times [K_i^G(t+1) + \sum_{j=1}^n K_j^P(t+1) + \sum_{j=1}^n k_{ji}(t)I_j(t)]^{\alpha_i} [E_i(t)L_i(t)]^{1-\alpha_i},$$

а сюда подставим выражения (19) и (12):

$$J_0 = \sum_{t=1}^T \delta^t \sum_{i=1}^n [1 - s_i(t) - B_i(t)] A_i(t) \times \\ \times [K_i^G(t) + \sum_{j=1}^n (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}^*(u_{ij}^*(t)) + \sum_{j=1}^n k_{ji}(t) s_j(t-1) Y_j(t-1)]^{\alpha_i} [E_i(t)L_i(t)]^{1-\alpha_i}$$

В части  $g_{ij}^*(u_{ij}^*(t))$  полученного выражения ещё есть зависимость от  $R_i(t)$  или от  $B_i(t)Y_i(t)$ . Перейдём к численному исследованию модели.



## Численное исследование

Практическая апробация модели проводилась на материалах трансграничного взаимодействия субъектов Южного федерального округа (ЮФО) РФ, к которым относятся Ростовская область (в модели присвоен индекс  $i=1$ ), Волгоградская область ( $i=2$ ), Краснодарский край ( $i=3$ ), Республика Адыгея ( $i=4$ ), Астраханская область ( $i=5$ ), Республика Калмыкия ( $i=6$ ), Республика Крым ( $i=7$ ).

Для исследования трансграничных взаимодействий регионов в составе ЮФО нужно произвести идентификацию параметров векторов модели для каждого региона, а также создать программу для расчета главных показателей, конкретно  $Y_i, C_i, I_i, K_i, L_i, R_i, E_i$  на временном промежутке на 5 лет.

Параметры модели, в частности, коэффициент  $A_i(t)$ , идентифицированы по данным [9] в РФ в [2,3].

1) Параметр производственной функции Кобба-Дугласа  $\alpha_i$ :

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$\alpha_1$	0,214360
Волгоградская область	$\alpha_2$	0,107626
Краснодарский край	$\alpha_3$	0,144864
Республика Адыгея	$\alpha_4$	0,236457
Астраханская область	$\alpha_5$	0,078457
Республика Калмыкия	$\alpha_6$	0,145812
Республика Крым	$\alpha_7$	0,150498

2) Для расчета разности коэффициента воспроизводства и коэффициента выбытия трудовых ресурсов ( $b_i - d_i$ ) использованы данные естественного прироста по регионам за выбранные периоды, из которых формировалось среднее арифметическое.

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$b_1 - d_1$	-0,0005
Волгоградская область	$b_2 - d_2$	-0,01775
Краснодарский край	$b_3 - d_3$	0,00575
Республика Адыгея	$b_4 - d_4$	-0,008
Астраханская область	$b_5 - d_5$	0,00375
Республика Калмыкия	$b_6 - d_6$	-0,00375
Республика Крым	$b_7 - d_7$	-0,007

3) Для определения параметра роста эффективности трудовых ресурсов  $\eta_i$  используются данные производительности труда  $E_i(t)$  за соответствующие периоды, которое определяется отношением значения объема валового продукта  $Y_i(t)$  и величиной трудоспособного населения  $L_i(t)$ :

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$\eta_1$	0,009251
Волгоградская область	$\eta_2$	-0,017337
Краснодарский край	$\eta_3$	0,024048
Республика Адыгея	$\eta_4$	0,001221
Астраханская область	$\eta_5$	0,027663
Республика Калмыкия	$\eta_6$	0,002532
Республика Крым	$\eta_7$	0,017375

- 4) Коэффициент износа основных фондов  $\mu_i$  получен из данных статистики в прямом виде за каждый год и усредняется.

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$\mu_1$	0,40640
Волгоградская область	$\mu_2$	0,4064
Краснодарский край	$\mu_3$	0,511
Республика Адыгея	$\mu_4$	0,511
Астраханская область	$\mu_5$	0,406
Республика Калмыкия	$\mu_6$	0,511
Республика Крым	$\mu_7$	0,712

- 5) Удельные выбросы загрязняющих веществ при производственной деятельности в атмосферу  $B_{K_i}^\alpha$  и воду  $B_{K_i}^w$  являются параметрами природоохранной технологии, которые регулируются государством. В итоге по регионам ЮФО получены следующие величины:

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$B_{K_1}^\alpha$	8,34E-05
	$B_{K_1}^w$	5,365E-05
	$B_{L_1}^\alpha$	0,0232252
	$B_{L_1}^w$	0,0756389
Волгоградская область	$B_{K_2}^\alpha$	9,585E-05
	$B_{K_2}^w$	6,303E-05
	$B_{L_2}^\alpha$	0,0687909
	$B_{L_2}^w$	0,0617981
Краснодарский край	$B_{K_3}^\alpha$	4,2518E-05
	$B_{K_3}^w$	0,00013121
	$B_{L_3}^\alpha$	0,02400843
	$B_{L_3}^w$	0,22684937

Регион	Величина	Значение
Республика Адыгея	$B_{K_4}^\alpha$	2,35727E-05
	$B_{K_4}^w$	8,18161E-05
	$B_{L_4}^\alpha$	0,028614278
	$B_{L_4}^w$	0,10440849
Астраханская область	$B_{K_5}^\alpha$	5,63E-05
	$B_{K_5}^w$	2,27E-05
	$B_{L_5}^\alpha$	0,185544
	$B_{L_5}^w$	0,085229
Республика Калмыкия	$B_{K_6}^\alpha$	2,222E-06
	$B_{K_6}^w$	0,0001432
	$B_{L_6}^\alpha$	0,0220744
	$B_{L_6}^w$	0,0896685
Республика Крым	$B_{K_7}^\alpha$	3,64224E-06
	$B_{K_7}^w$	9,41469E-07
	$B_{L_7}^\alpha$	0,02335533
	$B_{L_7}^w$	0,006049158

- б) Для расчета коэффициентов эффективности природоохранных ассигнований  $c_i^\alpha$  и  $c_i^w$  соответственно с индексом  $a$  – для атмосферы, с индексом  $w$  – для воды используются данные о доле обезвреживания загрязняющих веществ.

В итоге по регионам ЮФО:

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$c_1^\alpha$	0,000393
	$c_1^w$	0,000104
Волгоградская область	$c_2^\alpha$	0,000497
	$c_2^w$	0,000528
Краснодарский край	$c_3^\alpha$	0,000635
	$c_3^w$	9,42E-05
Республика Адыгея	$c_4^\alpha$	0,016904
	$c_4^w$	0,002975
Астраханская область	$c_5^\alpha$	0,00085
	$c_5^w$	0,001107
Республика Калмыкия	$c_6^\alpha$	0,029967
	$c_6^w$	0,002841
Республика Крым	$c_7^\alpha$	0,000772
	$c_7^w$	0,001659

- 7) Индексы влияния инновационной активности регионов Российской Федерации за 2005, 2010, 2015 годы получены в результате предшествующих исследований

на основе официальных данных Росстата [8]. На их основе функция влияния инноваций на выпуск конечного продукта выглядит следующим образом:

$$A(t) = 0,00268 \cdot t^2 - 10,774 \cdot t + 10835,328$$

- 8) Начальные значения параметров модели  $K_i(0)$ ,  $L_i(0)$  и  $E_i(0)$  определяются по официальным данным Росстата [10]) об объеме основных фондов и величине трудоспособного населения, а также нахождением отношения выработки ВВП к трудовым ресурсам соответственно каждого региона за 2022 год.

Регион	Величина	Значение
Ростовская область	$K_1(0)$	2786870
	$L_1(0)$	1958,1
	$E_1(0)$	687,98
Волгоградская область	$K_2(0)$	2180917
	$L_2(0)$	1124,6
	$E_2(0)$	685,97
Краснодарский край	$K_3(0)$	5937791
	$L_3(0)$	2599,1
	$E_3(0)$	856,42
Республика Адыгея	$K_4(0)$	202111
	$L_4(0)$	152,1
	$E_4(0)$	653,56
Астраханская область	$K_5(0)$	1498692
	$L_5(0)$	487,6
	$E_5(0)$	863,33
Республика Калмыкия	$K_6(0)$	203657
	$L_6(0)$	111,1
	$E_6(0)$	598,66
Республика Крым	$K_7(0)$	2212391
	$L_7(0)$	840,4
	$E_7(0)$	427,31

10) Коэффициент дисконтирования  $\rho$  принимаем на основе усредненной за период ключевой ставки (ставки рефинансирования) Центрального банка Российской Федерации:  $\rho=0,094$ .

Что же касается нижнего уровня – предприятий, для исследования были выбраны крупнейшие по выручке предприятия по регионам ЮФО, характеристику и отчетность которых можно найти по открытым данным в Интернете. Производственная мощность каждого предприятия считалась из уравнения  $g \cdot r_t^\alpha = r_{t+1}$ , где  $r_t$  – выручка в году  $t$ , а  $\alpha$  – эластичность выпуска продукции в зависимости от вида деятельности. В [37] приведены и обоснованы значения эластичности выпуска для следующих видов деятельности: для добычи – 0,082, для торговли, ресторанного бизнеса и транспорта – 0,056, для обрабатывающей промышленности и строительства – 0,166.

## 1. Республика Адыгея

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
ООО фирма «Дортранссервис»	Грузовые перевозки	1050100637190	7,6 млрд	2163,086321
ЭКСПРЕСС-КУБАНЬ ООО	Продукция из фруктов и овощей	1020100824985	7,3 млрд	1,573049862
ООО «ЮГ-АВТО ЭКСПЕРТ»	Розничная торговля легковыми автомобилями	1150107011174	6,5 млрд	4883,697502

Отчетность по соответствующим предприятиям представлена по ссылкам: <https://companies.rbc.ru/id/1050100637190-ooo-firma-dortransservis/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1020100824985-ooo-ekspress-kuban/#finance> и <https://companies.rbc.ru/id/1150107011174-ooo-yug-avto-ekspert/#finance>.

## 2. Астраханская область

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
ООО «ЛУКОЙЛ-Нижевожскнефть»	Добыча нефти	1023403432766	334,2 млрд	36132,377932
ООО «Газпром добыча Астрахань»	Добыча газа	1023001538460	126,5 млрд	20533,596854
ПАО «АСТРАХАНСКАЯ ЭНЕРГОСБЫТОВАЯ КОМПАНИЯ»	Электроэнергетика	1053000000041	12,4 млрд	2100,167620
ООО «ГАЗПРОМ МЕЖРЕГИОНГАЗ АСТРАХАНЬ»	Оптовая торговля топливом	1163025054499	9,7 млрд	1642,058660

Отчетность представлена по ссылкам: <https://companies.rbc.ru/id/1023403432766-ooo-lukoil-nizhnevolzhskneft/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1023001538460-ooo-gazprom-dobyicha-astrahan/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1053000000041-pao-astrahanskaya-energосbyitovaya-kompaniya/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1163025054499-ooo-gazprom-mezhregiongaz-astrahan/#finance>.

### 3. Волгоградская область

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
АО «ВТЗ»	Металлопрокат	1023401997101	75,6 млрд	9763,019409
ООО «ЛУКОЙЛ-Волгограднефтепереработка»	Нефтепродукты	1023404362662	69,8 млрд	9114,898893
ООО «Газпром межрегионгаз Волгоград»	Газификация	1023403844441	38,1 млрд	989,4280473

Отчетность представлена по соответствующим ссылкам:

<https://companies.rbc.ru/id/1023401997101-ao-volzhsnij-trubnyij-zavod/#finance>,

<https://companies.rbc.ru/id/1023404362662-ooo-lukoil-volgogradneftepererabotka/#finance>,

<https://companies.rbc.ru/id/1023403844441-ooo-gazprom-mezhregiongaz-volgograd/#finance>.

### 4. Республика Калмыкия

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
ООО «ЛУКОЙЛ-НИЖНЕВОЛЖСКНЕФТЬ-КАЛМЫКИЯ»	Деятельность трубопроводного транспорта	1143015002569	4,3 млрд	597,9983773
МАУ «КОММУНАЛЬНИК»	Органы местного самоуправления по управлению вопросами общего характера	1210800000432	4,1 млрд	1,232534275
ООО «ЛОТОС»	Розничная торговля напитками	1090803000012	2,9 млрд	1305,265350
ООО «888»	Розничная торговля пищевыми продуктами	1080816005380	2,1 млрд	998,1281008

Соответствующая отчетность представлена по ссылкам:

<https://companies.rbc.ru/id/1143015002569-ooo-lukoil-nizhnevolzhskneft-kalmykiya/#finance>,

<https://companies.rbc.ru/id/1210800000432-munitsipalnoe-avtonomnoe-uchrezhdenie->

[kommunalnik/#finance](#), <https://companies.rbc.ru/id/1090803000012-ooo-lotos/#finance> и <https://companies.rbc.ru/id/1080816005380-ooo-tri-vosmerki/#finance>.

#### 5. Краснодарский край

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
АО «ТАНДЕР»	Розничная торговля пищевыми продуктами	1022301598549	2,1 трлн	472730
ООО «ОНИКС КОФЕ»	Рестораны и службы доставки продуктов	1192375025820	247,3 млрд	84941,085308
ООО «ЛУКОЙЛ-ЮГНЕФТЕПРОДУКТ»	Торговля розничная моторным топливом в специализированных магазинах	1022301424254	198,6 млрд	23872,781806
ООО «Славянск ЭКО»	Нефтепродукты	1112370000753	161,9 млрд	20152,638582

Отчетность представлена по ссылкам: <https://companies.rbc.ru/id/1022301598549-ao-aktsionernoe-obschestvo-tander/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1192375025820-obschestvo-s-ogranichennoj-otvetstvennostyu-oniks-kofe/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1022301424254-ooo-lukojl-yugnefteprodukt/#finance> и <https://companies.rbc.ru/id/1112370000753-ooo-slavyansk-eko/#finance>.

#### 6. Ростовская область

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
ООО «АКСАЙВТОРМЕТ»	Утилизация	1196196005191	1,6 трлн	52231,211323
ООО «РОДНЫЕ ПОЛЯ»	Оптовая торговля с/х продукцией	1106165002350	299,5 млрд	69985,622305
АО «НЗНП»	Нефтепродукты	1046151001071	175,0 млрд	21435,536144
АО «АСТОН»	Производство масел и жиров	1096194001683	155,1 млрд	37052,936101

Отчетность представлена по соответствующим ссылкам:  
<https://companies.rbc.ru/id/1196196005191-obschestvo-s-ogranichennoj-otvetstvennostyu-aksajvtormet/#finance>,  
<https://companies.rbc.ru/id/1106165002350-ooo-torgovyij-dom-rif/#finance>,  
<https://companies.rbc.ru/id/1046151001071-ao-novoshajtinskij-zavod-nefteproduktov/#finance> и <https://companies.rbc.ru/id/1096194001683-ao-aston-produktyi-pitaniya-i-pischevyie-ingredientyi/#finance>.

## 7. Республика Крым

Название	Отрасль	ОГРН	Выручка	Производственная мощность
ГУП РК «КРЫМЭНЕРГО»	Электроэнергетика	1149102003423	28,0 млрд	3908,531602
ООО «КЕДР»	Оптовая торговля топливом	1149102012905	26,5 млрд	3990,784423
ООО «ПУД»	Розничная торговля пищевыми продуктами	1159102103093	20,5 млрд	5233,130916
ООО «ПАРТНЁР»	Оптовая торговля табачными изделиями	1142315002830	17,7 млрд	4796,881385

Отчетность можно найти по ссылкам: <https://companies.rbc.ru/id/1149102003423-gup-gup-respubliki-kryim-kryimenergo/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1149102012905-ooo-keдр/#finance>, <https://companies.rbc.ru/id/1159102103093-ooo-pud/#finance> и <https://companies.rbc.ru/id/1142315002830-ooo-partnyor/#finance>.

К стратегиям Центра относительно каждого региона относятся:

- 1) Доля  $s_i(t)$  от ВРП, которая идёт на производственные цели;
- 2) Доли  $v_i^a(t)$ ,  $v_i^w(t)$  от производственных инвестиций, которые идут на ликвидацию последствий загрязнения атмосферы и воды;
- 3) Доли  $k_{ij}(t)$  от производственных инвестиций, которые идут на общее развитие макрорегиона, так и на собственное развитие (при  $i=j$ ). Также доля  $k_{i0}(t)$  выделяется регионом на внешние по отношению к ЮФО цели (федеральные и межокружные программы и проекты).
- 4) Доли  $B_i(t)$  от ВРП, которая идет на ассигнования проектов ГЧП.

Зададим в качестве нижнего порога суммарного выпуска общественного блага при реализации проектов ГЧП 1,5 трлн. рублей.



Начнем исследование в имитационном режиме со случая, когда макрорегион ЮФО не выделяет средства на развитие ГЧП, т.е. при  $B_i(t) = 0$ .

Зададим условия устойчивого развития, при условии увеличения выпуска региональной продукции для каждого региона на 1%. Этого можно достигнуть при следующих долях от ВРП, которые идут на производственные цели:

Регион	Доля $s_i(t)$ , %
Ростовская область	76,4
Волгоградская область	44,4
Краснодарский край	24,6
Республика Адыгея	22,11
Астраханская область	79,2
Республика Калмыкия	68,7
Республика Крым	28,3

При этом некоторые регионы ЮФО могут оказать ресурсную помощь соседним регионам, нуждающимся в кооперации для решения поставленных задач, в следующих объемах от своих производственных инвестиций:

Донор	Получатель	Доля от $s_i(t)$ , %
Ростовская область	Волгоградская область	30
	Краснодарский край	10
	Астраханская область	30
	Республика Крым	10
Республика Адыгея	Астраханская область	10
	Республика Калмыкия	10
	Республика Крым	30
Республика Калмыкия	Ростовская область	30
	Республика Адыгея	20
	Республика Крым	10

Примечательно, что помощь другим регионам могут себе позволить такие экономически слабые регионы, как Адыгея и Калмыкия. Уровень их ВРП сравнительно низок, что требует меньше усилий для увеличения этого показателя на 1 % с направлением свободных средства на проекты в других регионах.

При этом выигрыши регионов равны нулю, потому как на каждом этапе они соразмерны выпуску общественного блага при развитии ГЧП, которого нет в данном случае. Условие устойчивого развития на выпуск общественного блага в результате реализации проектов ГЧП не выполняется. Но при этом на потребление средства остаются и выигрыш суммарный макрорегиона равен 64,3281 млн. руб.

Для увеличения выпуска региональной продукции на 2 % требуется направить на производственные цели следующие части ВРП:

Регион	Доля $s_i(t)$ , %
Ростовская область	86

Волгоградская область	93
Краснодарский край	85
Республика Адыгея	22,4
Астраханская область	89
Республика Калмыкия	56,6
Республика Крым	0

При этом некоторые регионы ЮФО могут оказать ресурсную помощь соседним регионам, нуждающимся в кооперации для решения поставленных задач, в следующих объемах от своих производственных инвестиций:

Донор	Получатель	Доля от $s_i(t)$ , %
Ростовская область	Волгоградская область	30
	Астраханская область	30
Краснодарский Край	Ростовская область	20
	Астраханская область	20

В данном случае экономически слабые регионы не могут помочь остальным, так как для повышения их ВРП на 2 % требуется больше усилий. Основную нагрузку в данном случае вынуждены нести два самых экономически развитых региона ЮФО: Ростовская область и Краснодарский край.

Увеличить ВРП всех регионов ЮФО на 3 % не представляется возможным. В случае направления 10 % ВРП каждого региона на развитие ГЧП ситуация имеет следующую динамику: доля от ВРП, направляемая на производственные цели, равна нулю, и ни один регион не нуждается в помощи другого региона, опираясь только на средства бизнеса. При этом ВРП всех регионов удастся увеличить на 50 % за пять лет. Потребление макрорегиона снизится по сравнению со случаем полного отсутствия поддержки проектов ГЧП, и составит 63,4846 млн. руб. В данном случае суммарный выпуск общественного блага составляет 765,232 млрд. руб. Но условие устойчивого развития на выпуск общественного блага в результате реализации проектов ГЧП выполнить также не удастся.

Вместе с тем, при направлении 10% всех ресурсов на развитие ГЧП, ВРП регионов удастся увеличить на 60 % за пять лет. Доля от ВРП направляемая на производственные цели составит 0, и ни один регион не потребует помощи за счет привлечения средств бизнеса. Потребление макрорегиона еще больше снизится и составит 56,4308 млн. руб. В данном случае суммарный выпуск общественного блага составит 1,53046 трлн. руб. Условие устойчивого развития на выпуск общественного блага в результате реализации проектов ГЧП выполняется.

Далее при повышении доли ВРП, которая направляется на развитие проектов ГЧП, потребление уменьшается, что не согласуется с его максимизацией, поэтому расчеты можно остановить, считая, что мы получили оптимальное решение для ЮФО с учетом всех условий устойчивого развития.

## Обсуждение

Предложенная модель дополняет рассмотренную ранее в [2]-[3]. Модель в [2]-[3] является частным случаем модели, при которой не развивается сектор государственно-частного партнёрства. Результаты исследования текущей модели при отсутствии вложений в ГЧП (т.е. при  $V_i(t)=0$ ) полностью совпадают с результатами исследования модели в [2]-[3].

Именно, при отсутствии вложений в региональное развитие в ГЧП результаты моделирования следующие. Всем регионам одновременно удастся повысить ВРП на 2% и уменьшить загрязнения на 7% по сравнению с изначальными значениями. При этом Волгоградская область и Астраханская область почти все средства должны направить на восполнение основных фондов, оставляя незначительную часть на потребление. При этом Астраханской области не хватит своих средств на повышение ВРП, ей должна помочь Ростовская область, направив 40% своих инвестиций в развитие соседнего региона. Меньше всего средств на инвестиции в развитие может направить Республика Адыгея – 22%. Все остальные регионы инвестируют 55-60%.

Повысить ВРП всех регионов ЮФО на 3% по сравнению с последней таблицей не удастся, так как Ростовской области придётся направить все средства на помощь Астраханской области. Возможна ситуация одновременного повышения ВРП на 3% для всех регионов, кроме Астраханской области, при этом она сможет повысить ВРП только на 1%. При этом Волгоградская область, Республика Крым и Республика Калмыкия на инвестиции должны направить 87% бюджетных ресурсов. Меньше всего на инвестиции сможет направить Республика Адыгея - 35%. Остальные регионы – около 80%. Ростовская область должна направить в Волгоградскую область – до 40% своих инвестиций.

Максимально увеличить ВРП можно на 8% для Республики Адыгея, на 7% - для Ростовской области, на 4% - для Республики Калмыкии и Республики Крым, на 3% - для Краснодарского края, на 2% - для Волгоградской области, на 1% - для Астраханской области. В этом случае Краснодарский край должен выделить на инвестиции в Ростовскую область - 20% ресурсов. Примечательно, что в этом случае Краснодарскому краю не хватит средств на повышение ВРП с 3% до 4%, но хватает ресурсов, чтобы повысить ВРП Ростовской области с 5% до 7%.

Дальнейшее увеличение ВРП при отсутствии вложений на развитие проектов ГЧП невозможно. При выделении 10 % средств от ВРП, полученных на предыдущем этапе на развитие проектов ГЧП, ВРП в течение 5 лет можно повысить на 50%, а при выделении 20% средств на развитие проектов ГЧП ВРП удастся повысить на 60% по сравнению с имеющимся на начальный момент времени. При этом регион приобретает независимость от других регионов Южного федерального округа и может справляться с социально-экономическим развитием без их помощи.

## Заключение

Исследована модель социо-экономического развития региона с учётом частных интересов агентов. В зависимости от вида производственных функций агента общей и частной деятельности выявлены четыре случая. Случаи 1 и 2 удалось полностью исследовать аналитически, а вот случаи 3 и 4 аналитически неразрешимы. В дальнейшем предполагается решать задачу (28)-(29) в случаях 3 и 4 при фиксированных стратегиях  $s_{ij}(t)$  или задач (30)-(8) при фиксированных стратегиях  $r_{ij}(t)$ , т.е. применить отдельно экономические механизмы стимулирования либо распределением ресурсов, либо управлением доли участия в общем доходе.

Задача Центра решается в имитационном режиме. На примере Южного федерального округа Российской Федерации приведены результаты исследования модели. Для идентификации региональных параметров регионов взяты данные из статей [2,3]. Даны рекомендации по повышению качества жизни населения регионов ЮФО. Дана сравнительная характеристика результатов исследования модели с полученными ранее результатами в [2,3], в моделях которых не учитывалось развитие регионов при помощи механизмов государственно-частного партнёрства с учётом частных интересов предприятий частного бизнеса.

В дальнейшем планируется исследование модели для случая агентов-стран с учётом феномена конкуренции-кооперации (coopetition).

## Литература

1. Adams W.M., Jeanrenaud S.J. Transition to Sustainability: Towards a Humane and Diverse World. – Gland: Int. Union for Conservation of Nature and Natural Resources, 2008.
2. Anopchenko T., Gorbaneva O., Lazareva E., Murzin A., Ougolnitsky G. Advanced Solow model as a tool for coordination of interests of spatial economic systems' development (on the materials of the South Russian macro-region) // *Advances in Systems Science and Applications*, 2019, 19(4), 1-13.
3. Anopchenko T., Gorbaneva O., Lazareva E., Murzin A., Ougolnitsky G. Modeling Public—Private Partnerships in Innovative Economy: A Regional Aspect // *Sustainability*, 2019, 11(20), 5588.
4. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. - Philadelphia, 1999.
5. Belenky A. Three quantitative management problems in public procurement and decision procedures for their analysis and solving // *Procedia Comput. Sci.*, 2013, 17, 1142–1153.
6. Cairns R.D., Long N.V. Maximin: a direct approach to sustainability // *Env. Dev. Econ.*, 2006 (11), 275-300.
7. Celucci T.A. A Guide to Innovative Public-Private Partnerships: Utilizing the Resources of the Private Sector for the Public Good. - Government Institutes, 2011.
8. Clark W.C. Sustainability Science: A Room of its Own // *Proceedings of the National Academy of Science*, 2007 (114), 1737-1738.
9. Clark W.C., Dickson N.M. Sustainability Science: The Emerging Research Program // *Proceedings of the National Academy of Science*, 2003(100), 8059-8061.
10. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. - Cambridge University Press, 2000.
11. Doyen L., Martinet V. Maximin, viability and sustainability // *J. of Econ. Dynamics and Control*, 2012 (36), 1414-1430.
12. Engel E., Fischer R.D., Galetovic A. The Economics of Public-Private Partnerships: A Basic Guide. Cambridge University Press, 2014.
13. Geddes M. Making Public-Private Partnerships Work: Building Relationships and Understanding Cultures. - Routledge, 2017.
14. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. Social and Private Interests Coordination Engines in Resource Allocation: System Compatibility, Corruption, and Regional Development // *Annals of the International Society of Dynamic Games*, 2020, 16, 119-150.
15. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A., Murzin A.D. Hierarchical SPICE-Models of Public-Private Partnerships // *Public-Private Partnerships: Trends, Perspectives and Opportunities*. Ed. by Diego Monferrer Tirado, Beatriz Irun Molina. N.Y.: Nova Science Publ., 2021. P.113-148.
16. Iossa E., Martimort D. The Simple Micro-Economics of Public-Private Partnerships. CMPO Working Paper Series No. 08/199, 2008. 57 p.

17. Journal of Public Economic Theory: Special Issue on Public-Private Partnerships (eds. D. Martimort, F. Menezes, M. Wooders). J. Wiley and Sons, February 2015, 17(1), 1-146.
18. Kates R. et al. Sustainability Science // Science, 2001 (292), 641-642.
19. Lavlinskii S.M., Panin A.A., Plyasunov A.V. Comparison of models of planning public-private partnership // J. Appl. Ind. Math., 2016, 10,356–369.
20. Lavlinskii S.M., Panin A.A., Plyasunov A.V. The Stackelberg Model in Territorial Planning // Automation and Remote Control, 2019, 80(2), 286-296.
21. Martinet V., Doyen L. Sustainability of an economy with an exhaustible resource: a viable control approach // Resource and Energy Econ., 2007 (29), 17-39.
22. Maskin E., Tirole J. Public-private partnerships and government spending limits // Intern. J. Industrial Organization, 2008, 26(2), 412-420.
23. Morley M. The Public-Private Partnership Handbook: How to Maximize Value from Joint Working. - Kogan Page, 2015.
24. Osei-Kyei R., Chan A.P.C. Model for predicting the success of public–private partnership infrastructure projects in developing countries: A case of Ghana // Architectural Engineering and Design Management, 2019, 15(3), 213-232.
25. Ougolnitsky G. Sustainable Management. – N.Y.: Nova Science Publ., 2011. – 288 p.
26. Ougolnitsky G. Game theoretic formalization of the concept of sustainable development in the hierarchical control systems // Annals of Operations Research, 2014, 220(1), 69-86.
27. Ougolnitsky G.A. Sustainable Management as a Key to Sustainable Development // Sustainable Development: Processes, Challenges and Prospects. Ed. D. Reyes. N.Y.: Nova Science Publishers, 2015. P.87-128.
28. Ougolnitsky G.A. A System Approach to the Regional Sustainable Management // Advances in Systems Science and Applications, 2017, 17(2), 52-62.
29. Ougolnitsky G.A., Anopchenko T.Yu., Gorbaneva O.I., Lazareva E.I., Murzin A.D. System Methodology and Model Tools for Territorial Sustainable Management // Advances in Systems Science and Applications, 2018, 18(4),136-150.
30. Our Common Future. World Commission on Environment and Development (WSED). - Oxford, 1987.
31. Peng Y., Jing Zhou, Qiang Xu, Xiaoling Wu. Cost Allocation in PPP Projects: An Analysis Based on the Theory of “Contracts as Reference Points” // Discrete Dynamics in Nature and Society, vol.2014, Article ID 158765.
32. Shkred V.N., Murzin A.D. The Analysis of the Organizational and Financial Mechanism of State-Private Partnership in the Regions of the Russian Federation // Sochi J. of Economy, 2020, 14(1), 92-98.
33. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly J. of Economics, 1956, 70 (1), 65–94.
34. Trotsenko O.S. Models for the implementation of public-private partnerships in Russia and foreign countries // Education and Law, 2018, 6, 261-266.
35. Yescombe E.R. PPP: Principles of Policy and Finance. - Elsevier, 2007.
36. Zaccai E. Over two decades in pursuit of sustainable development: Influence, transformations, limits // Env. Development, 2012, 1, 79-90.
37. Горидько Н. П., Нижегородцев Р. М. Точки роста региональной экономики и регрессионная оценка отраслевых инвестиционных мультипликаторов // Экономика региона, 2018, 14(1), 29-42.